10. Matematiniai žaidimai. A dalis

Įvadas

Mokytojui

Matematinių žaidimų tema, be abejo, skamba patraukliai ir suteikia galimybę interaktyviai ieškoti sprendimo būdų, žaidžiant kartu su draugu. Vis dėlto sistemingas tokių uždavinių sprendimas, ieškant pergalingos strategijos, ne visada yra paprastas. Medžiagoje pateiktas ir tokių uždavinių kontekstas, ir pagrindinės taktikos, kurias galima naudoti bandant juos išspręsti. Jaunesnių klasių mokiniams gali būti naudinga panagrinėti tuos metodus kartu su mokytoju.

Modulis skirtas 5–6 klasių mokiniams, tačiau jei 7–8 klasių mokiniai tik pradeda aiškintis šią temą, jiems taip pat reikėtų pradėti nuo šios dalies.

Mokiniui

Žaidimų (arba lošimų) teorija kaip matematikos sritis analizuoja strategijas pačiose įvairiausiose situacijose. Ji ypač svarbi ekonomikoje, tačiau taip pat gali būti naudojama politikoje, psichologijoje ar filosofijoje. Pavyzdžiui, vienas iš 1994 metų Nobelio ekonomikos premijos laureatų buvo matematikas Johnas Nashas, 1950-aisiais savo daktaro disertacijoje padėjęs pamatus žaidimų teorijai (kai ją gynėsi, jam tebuvo 21 metai). 2005 metų Nobelio ekonomikos premija skirta Izraelio ir JAV mokslininkams, aprašiusiems konfliktus ir bendradarbiavimą naudojant žaidimo teorijos metodus. Taigi žaidimai nėra lengvabūdiškas ir nereikšmingas laiko leidimo būdas – matematikai juos paverčia svarbiais atradimais. Beje, šie trys matematikai, anaiptol, nėra vieninteliai, gavę Nobelio ekonomikos premijas (taigi neteisūs tie, kurie sako, kad matematikams nėra šansų gauti šią premiją).

Be abejo, už čia pateiktų uždavinių sprendimą Nobelio premijos negausite, ir į rimtus žaidimų teorijos uždavinius jie dar nelabai panašūs, tačiau pati *geriausios strategijos paieškos* idėja čia bus svarbi.

Paprastai matematinių žaidimų esmė yra tokia: yra tam tikros žaidimo taisyklės (koks gali būti ėjimas); dažniausiai du (kartai gali būti ir vienas arba daugiau nei du) žaidėjai ar žaidėjų grupės, kurie pakaitomis daro ėjimus. Reikia rasti (arba bent jau įrodyti, kad egzistuoja arba neegzistuoja) tokią žaidimo strategiją, kuri pirmam arba antram pradedančiam užtikrina laimėjimą, nesvarbu, kaip protingai bežaistų kitas žaidėjas.

Pagrindiniai metodai ar būdai, padedantys surasti tokią strategiją nesudėtinguose uždaviniuose, gali būti šie:

- Ėjimas „nuo galo“, siekiant atsidurti galutinį pergalingą žingsnį užtikrinančioje pozicijoje, kokia turėtų būti pergalinga pozicija prieš tai ir t. t.
- Visų galimų variantų perrinkimas. Aišku, toks metodas veikia tik tada, kai variantų nėra itin daug. Pavyzdžiui, galite nesunkiai perrinkti tradicinio žaidimo „Kryžiukai ir nuliukai“ variantus tam, kad įsitikintumėte, jog neegzistuoja pergalinga strategija šiam žaidimui, jeigu abu žaidėjai žaidžia protingai. Beje, kartais naudinga pažaisti tuos žaidimus su draugu, kad pajustumėte žaidimą ar pastebėtumėte dėsningumus. Svarbu atsiminti tai, kad jeigu pavyks nors ir dešimt kartų iš eilės laimėti žaidimą, dar nereiškia, jog radote pergalingą strategiją ar išsprendėte uždavinį. Gal Jums tiesiog pasisekė arba Jūsų žaidimo partneris nežino, kaip protingai žaisti. Pergalinga strategija reiškia užtikrintą laimėjimą, nesvarbu, koks būtų priešininko ėjimas.
- Simetrija. Ne visada akivaizdu, kur galima ją įžvelgti, tad sunkiausia uždavinio sprendimo dalis ir gali būti surasti arba sukonstruoti tokią simetriją, kuri leistų, pavyzdžiui, simetriškai kartoti priešininko ėjimus, užsitikrinant pergalę (dažnai žaidime pralaimi tas, kuris jau neturi ėjimo, o jei galite simetriškai kartoti priešininko ėjimus, vadinasi, jis pirmasis ir liks be ėjimo).

Kūrybingai taikydami šiuos metodus, nesunkiai išspręsite uždavinius. Atkreipkite dėmesį į pateiktą pavyzdį.

10. Matematiniai žaidimai. A dalis

Kaip spręsti?

Žaidime „Kas pirmas pasakys skaičių 100?“ dalyvauja du žaidėjai. Pirmas pasako bet kurį sveiką skaičių nuo 1 iki 9 imtinai. Antras prideda prie pasakyto bet kurį patinkantį sveiką skaičių nuo 1 iki 9 ir pasako sumą. Prie šios sumos pirmas vėl prideda bet kurį sveiką skaičių nuo 1 iki 9, pasako naują sumą ir t. t. Laimi tas, kuris pirmas pasakys skaičių 100. Šiame žaidime pirmas žaidėjas visada praloš, jei tik jo priešininkas atskleis vieną paslaptį. Kokia tai paslaptis, lemianti pergalę antram žaidėjui?

Sprendimas

Pabandykime spręsti „nuo galo“: kokį skaičių turiu pasakyti prieš 100, kad kokį skaičių bepasirinktų mano priešininkas, aš kitu ėjimu galėčiau sau užsitikrinti pergalę? Akivaizdu, jei pasakysiu 90, kokį skaičių nuo 1 iki 9 bepridėtų mano priešininkas, visada galėsiu pridėti tiek, kad pasiekčiau 100 (jei pasirinks 1, pridėsiu 9; jei 2 – 8, jei 3 – 7 ir t. t.). Taigi, jei užsitikrinsiu sau 90, laimėsiu. Tada tereikia pažiūrėti, kaip užsitikrinti 90. Analogiškai samprotaujant tam reikia prieš tai „turėti“ 80, dar anksčiau 70, 60, 50, 40, 30, 20 ir 10. Kad būtų 10, gali užtikrinti antras žaidėjas – kokį skaičių pirmu ėjimu bepasakytų pirmas, antras gali pridėti tiek, kad gautų 10.

O dabar *pažaiskite* patys!

Uždaviniai

1. Dviese žaidžia „kryžiukais ir nuliukais“ lentoje 3×3, kiek pakeitę įprastas taisykles: kiekvienas žaidėjas savo ėjimu gali pažymėti tiek „kryžiuką“, tiek „nuliuką“ (aišku, vieną iš jų kiekvieną kartą). Laimi tas, po kurio ėjimo susidaro trys iš eilės einantys vienodi ženkliukai (vertikaliai, horizontaliai arba įstrižai – kaip ir įprastame žaidime). Kas laimės šiame žaidime, jei žais protingai?

P. Kokie antro žaidėjo šansai, jei pirmas savo pirmu ėjimu pažymės centrinį langelį?

S. Laimės pirmas žaidėjas. Jis turi centre pažymėti, tarkime, „kryžiuką“. Tada priešininkas bus priverstas pažymėti „nuliuką“, nes kitaip jis pralaimės jau po kito ėjimo. Paskui pirmas žaidėjas laimi pažymėdamas simetrišką centro atžvilgiu „nuliuką“.

2. Ant stalo guli 66 karoliukai. Pirmas žaidėjas gali paimti nuo 1 iki 9 karoliukų, antras žaidėjas ima nuo 1 iki 9 karoliukų iš likusios krūvelės ir t. t. Laimi tas, kuris paima paskutinius karoliukus. Kurio iš žaidėjų strategija bus pergalinga? Nurodykite ją.

P. Prisiminkite pavyzdyje pateiktą uždavinį.

S. Panašiai, kaip pavyzdyje pateiktame uždavinyje, čia pergalingą poziciją turės tas, kuris priešpaskutiniu ėjimu paliks 10 karoliukų; prieš tai – 20 ir t. t. Taigi laimės pirmas žaidėjas, jei jis pirmuoju ėjimu paims 6 karoliukus.

10. Matematiniai žaidimai. A dalis

3. Ant stalo guli N karoliukų. Kiekvienas žaidėjas paeiliui gali paimti nuo 1 iki p karoliukų. Laimi tas, kas paima paskutinius karoliukus. Kurio iš žaidėjų strategija bus pergalinga? Nurodykite ją.

P. Pabandykite panagrinėti ir apibendrinti pavyzdį ir 2-ąjį uždavinius.

S. Šis uždavinys – pavyzdinio ir 2-ojo uždavinio apibendrinimas.

a) Jei N dalijasi iš $p + 1$, laimi antras žaidėjas. Kad ir kaip pradėtų jo priešininkas, jis visada galės patekti į pergalę lemiančias pozicijas.

b) Jei N nesidalija iš $p + 1$, teisingai žaisdamas laimi pirmas žaidėjas. Jam tereikia pirmu ėjimu paimti tiek karoliukų, kad likęs skaičius dalintųsi iš $p + 1$, ir toliau laikytis tos pačios taktikos.

4. Ant stalo guli 15 pieštukų. Du žaidėjai paeiliui ima vieną, du arba tris pieštukus. Skirtingai nei ankstesniuose uždaviniuose, čia pralaimi tas, kuriam lieka paimti paskutinį pieštuką. Kaip turi žaisti pradedantysis, kad priverstų savo priešininką paimti paskutinį pieštuką?

P. Palyginkite šį uždavinį su ankstesniais.

S. Regis, šis uždavinys yra kiek kitoks nei prieš tai buvę, tačiau iš esmės jį labai lengva transformuoti į ankstesnius uždavinius. Juk laimės tas, kuris paims 14-ąjį pieštuką, tada kitam liks paimti paskutinįjį penkioliktąjį pieštuką. Taigi tereikia nagrinėti 3-iąjį uždavinį su $N = 14$ ir $p = 3$.

5. Yra dvi krūvelės po 10 akmenukų. Dviese paeiliui ima akmenukus iš kurios nors krūvelės (nebūtinai kiekvieną kartą iš tos pačios). Laimi tas, kuris paima paskutinį akmenuką. Kurio iš žaidėjų strategija bus pergalinga? Nurodykite ją.

P. Kai turime kelias krūveles, dėžutes ir pan., ieškokime tam tikros simetrijos.

S. Šioje situacijoje pergalingą strategiją turi antras žaidėjas – jam tereikia kartoti pirmo žaidėjo ėjimus, tik kiekvienu ėjimu imti iš kitos dėžutės, nei prieš jį ėmęs pirmas žaidėjas. Tokiu būdu pirmas žaidėjas bus priverstas paskutiniu savo ėjimu kurią nors krūvelę palikti tuščią, antras pasiims kitoje krūvelėje likusį akmenuką ir laimės.

6. Du žaidėjai žaidžia degtukais. Degtukus jie ima paeiliui iš dviejų dėžučių. Kiekvienas žaidėjas gali paimti bet kokį skaičių degtukų iš bet kurios vienos dėžutės. Vienoje dėžutėje yra 73 degtukai, kitoje – 56. Laimi tas, kuris paskutinis paima paskutinius degtukus. Kaip turi žaisti pirmas žaidėjas, kad laimėtų?

P. Ir vėl ieškokite simetrijos. Samprotaukite panašiai kaip ankstesniame uždavinyje.

S. Samprotauti reikėtų panašiai kaip ankstesniame uždavinyje, tik čia pergalingą strategiją turės pirmas žaidėjas, kuris pirmu savo ėjimu sulygins abiejose dėžutėse esančių degtukų skaičių (paims 17 degtukų iš pirmos dėžutės), paskui simetriškai kartos savo priešininko ėjimus.

Kuriame Lietuvos ateitį
2014–2020 metų Europos Sąjungos fondų investicijų veiksmų programa

Specialieji moduliai parengti įgyvendinat Specialiosios pedagogikos ir psichologijos centro projektą „Mokinių akademinių gebėjimų atpažinimo ir jų ugdymo kokybės plėtra“.