11. Matematiniai žaidimai. B dalis

Įvadas

Mokytojui

Matematinių žaidimų tema, be abejo, skamba patraukliai ir suteikia galimybę interaktyviai ieškoti sprendimo būdų, žaidžiant kartu su draugu. Vis dėlto sistemingas tokių uždavinių sprendimas, ieškant pergalingos strategijos, ne visada yra paprastas. Medžiagoje pateiktas ir tokių uždavinių kontekstas, ir pagrindinės taktikos, kurias galima naudoti bandant juos išspręsti. Jaunesnių klasių mokiniams gali būti naudinga panagrinėti tuos metodus kartu su mokytoju.

Modulis skirtas 5–6 ir 7–8 klasių mokiniams.

Mokiniui

Žaidimų (arba lošimų) teorija kaip matematikos sritis analizuoja strategijas pačiose įvairiausiose situacijose. Ji ypač svarbi ekonomikoje, tačiau taip pat gali būti naudojama politikoje, psichologijoje ar filosofijoje. Pavyzdžiui, vienas iš 1994 metų Nobelio ekonomikos premijos laureatų buvo matematikas Johnas Nashas, 1950-aisiais savo daktaro disertacijoje padėjęs pamatus žaidimų teorijai (kai ją gynėsi, jam tebuvo 21 metai). 2005 metų Nobelio ekonomikos premija skirta Izraelio ir JAV mokslininkams, aprašiusiems konfliktus ir bendradarbiavimą naudojant žaidimo teorijos metodus. Taigi žaidimai nėra lengvabūdiškas ir nereikšmingas laiko leidimo būdas – matematikai juos paverčia svarbiais atradimais. Beje, šie trys matematikai, anaiptol, nėra vieninteliai, gavę Nobelio ekonomikos premijas (taigi neteisūs tie, kurie sako, kad matematikams nėra šansų gauti šią premiją).

Be abejo, už čia pateiktų uždavinių sprendimą Nobelio premijos negausite, ir į rimtus žaidimų teorijos uždavinius jie dar nelabai panašūs, tačiau pati *geriausios strategijos paieškos* idėja čia bus svarbi.

Paprastai matematinių žaidimų esmė yra tokia: yra tam tikros žaidimo taisyklės (koks gali būti ėjimas); dažniausiai du (kartai gali būti ir vienas arba daugiau nei du) žaidėjai ar žaidėjų grupės, kurie pakaitomis daro ėjimus. Reikia rasti (arba bent jau įrodyti, kad egzistuoja arba neegzistuoja) tokią žaidimo strategiją, kuri pirmam arba antram pradedančiam užtikrina laimėjimą, nesvarbu, kaip protingai bežaistų kitas žaidėjas.

Pagrindiniai metodai ar būdai, padedantys surasti tokią strategiją nesudėtinguose uždaviniuose, gali būti šie:

- Ėjimas „nuo galo“, siekiant atsidurti galutinį pergalingą žingsnį užtikrinančioje pozicijoje, kokia turėtų būti pergalinga pozicija prieš tai ir t. t.
- Visų galimų variantų perrinkimas. Aišku, toks metodas veikia tik tada, kai variantų nėra itin daug. Pavyzdžiui, galite nesunkiai perrinkti tradicinio žaidimo „Kryžiukai ir nuliukai“ variantus tam, kad įsitikintumėte, jog neegzistuoja pergalinga strategija šiam žaidimui, jeigu abu žaidėjai žaidžia protingai. Beje, kartais naudinga pažaisti tuos žaidimus su draugu, kad pajustumėte žaidimą ar pastebėtumėte dėsningumus. Svarbu atsiminti tai, kad jeigu pavyks nors ir dešimt kartų iš eilės laimėti žaidimą, dar nereiškia, jog radote pergalingą strategiją ar išsprendėte uždavinį. Gal Jums tiesiog pasisekė arba Jūsų žaidimo partneris nežino, kaip protingai žaisti. Pergalinga strategija reiškia užtikrintą laimėjimą, nesvarbu, koks būtų priešininko ėjimas.
- Simetrija. Ne visada akivaizdu, kur galima ją įžvelgti, tad sunkiausia uždavinio sprendimo dalis ir gali būti surasti arba sukonstruoti tokią simetriją, kuri leistų, pavyzdžiui, simetriškai kartoti priešininko ėjimus, užsitikrinant pergalę (dažnai žaidime pralaimi tas, kuris jau neturi ėjimo, o jei galite simetriškai kartoti priešininko ėjimus, vadinasi, jis pirmasis ir liks be ėjimo).

Kūrybingai taikydami šiuos metodus, nesunkiai išspręsite uždavinius. Atkreipkite dėmesį į pateiktą pavyzdį.

11. Matematiniai žaidimai. B dalis

Kaip spręsti?

Žaidime „Kas pirmas pasakys skaičių 100?“ dalyvauja du žaidėjai. Pirmas pasako bet kurį sveiką skaičių nuo 1 iki 9 imtinai. Antras prideda prie pasakyto bet kurį patinkantį sveiką skaičių nuo 1 iki 9 ir pasako sumą. Prie šios sumos pirmas vėl prideda bet kurį sveiką skaičių nuo 1 iki 9, pasako naują sumą ir t. t. Laimi tas, kuris pirmas pasakys skaičių 100. Šiame žaidime pirmas žaidėjas visada praloš, jei tik jo priešininkas atskleis vieną paslaptį. Kokia tai paslaptis, lemianti pergalę antram žaidėjui?

Sprendimas

Pabandykime spręsti „nuo galo“: kokį skaičių turiu pasakyti prieš 100, kad kokį skaičių bepasirinktų mano priešininkas, aš kitu ėjimu galėčiau sau užsitikrinti pergalę? Akivaizdu, jei pasakysiu 90, kokį skaičių nuo 1 iki 9 bepridėtų mano priešininkas, visada galėsiu pridėti tiek, kad pasiekčiau 100 (jei pasirinks 1, pridėsiu 9; jei 2 – 8, jei 3 – 7 ir t. t.). Taigi, jei užsitikrinsiu sau 90, laimėsiu. Tada tereikia pažiūrėti, kaip užsitikrinti 90. Analogiškai samprotaujant tam reikia prieš tai „turėti“ 80, dar anksčiau 70, 60, 50, 40, 30, 20 ir 10. Kad būtų 10, gali užtikrinti antras žaidėjas – kokį skaičių pirmu ėjimu bepasakytų pirmas, antras gali pridėti tiek, kad gautų 10.

O dabar *pažaiskite* patys!

Uždaviniai

1. Ant stalo guli dvi išgliaudytų riešutų krūvelės, vienoje – 7, kitoje – 6 riešutai. Dviese paeiliui atlieka ėjimus: suvalgo vieną iš krūvelių, o kitą padalija į dvi dalis. Jei žaidėjas taip padalija krūveles, kad kitas jau negali padalyti likusios į dvi dalis, nes lieka tik vienas riešutas, tai jis tą riešutą suvalgo ir laimi. Kurio iš žaidėjų strategija bus pergalinga? Nurodykite ją.

P. Koks turėtų būti pirmas ėjimas pradedančio žaidėjo, kad antras neturėtų pasirinkimo?

S. Pirmas žaidėjas laimės po dviejų ėjimų. Pirmu ėjimu jam tereikia suvalgyti krūvelę su 7 riešutais, o kitą krūvelę padalyti į dvi lygias dalis po 3 riešutus. Priešininkas pasirinkimo neturi – suvalgo vieną krūvelę, o kitą dalija į krūveles, kur vienoje bus 1, o kitoje – 2 riešutai. Tada pirmas žaidėjas suvalgo krūvelę su 2 riešutais. Lieka vienas riešutas, tačiau jo į dvi krūveles padalyti jau negalima, todėl šį riešutą žaidėjas taip pat suvalgo ir laimi.

2. Kairiajame languotos juostos 1×2018 langelyje guli 3 sagos. Jonas ir Petras žaidžia tokį žaidimą: kiekvienas iš jų gali perkelti bet kurią sagą (bet tik vienu ėjimu) į dešinę per bet kokį langelių skaičių. Pralaimi tas, kuriam nelieka, kur eiti. Įrodykite, kad Petras pradėdamas gali užsitikrinti sau pergalę.

11. Matematiniai žaidimai. B dalis

P. Jei liks tik dvi sagos, turbūt žaisti bus paprasčiau. Tad koks turėtų būti pirmasis Petro žingsnis?

S. Petrui pirmu ėjimu tereikia perkelti vieną iš sagų į dešinįjį kraštutinį langelį. Paskui jam reikės tik kartoti Jono ėjimus taip, kad po jo ėjimo dvi likusios sagos vis atsidurtų viename langelyje.

3. Kolumbo uždavinys. Du žaidėjai paeiliui deda vienodo dydžio kiaušinius ant kvadratinės servetėlės tol, kol ant jos dar yra vietos nors vienam kiaušiniui. Negalima perstumti anksčiau padėtų kiaušinių arba dėti kiaušinius vieną ant kito. Laimi tas, kuris padeda paskutinį kiaušinį. Raskite pirmo žaidėjo pergalingą strategiją.

P. Pirmam žaidėjui, atliekant pirmą ėjimą, reikia sukurti situaciją, kurioje vėliau galėtų atlikti simetriškus žingsnius.

S. Pirmą kiaušinį reikia padėti tiksliai į servetėlės centrą, paskui kiekvieną priešininko ėjimą kartoti simetriškai atliekant ėjimą. Taigi, jei priešininkas dar turės, kur dėti kiaušinį, tai ir pirmas žaidėjas turės vietos simetriškam varžovo ėjimui. Tiesa, dėl netaisyklingos kiaušinio formos gali būti sunkumų, todėl reikėtų prisiminti Kolumbą ir, padaužius kiaušinio galą, pastatyti jį vertikaliai tiesiai per servetėlės centrą.

4. Du žaidėjai pakaitomis brėžia taisyklingo 2018-kampio įstrižaines. Kiekvienu ėjimu galima sujungti bet kurias dvi šio daugiakampio viršūnes, jei naujoji įstrižainė nekerta nė vienos anksčiau nubrėžtosios. Pralaimi tas, kuris jau negali nubrėžti jokios įstrižainės. Kurio iš žaidėjų strategija bus pergalinga? Nurodykite ją.

P. Kaip čia sukurti simetrišką situaciją?

S. Laimi pirmas, nubrėžęs pirmąją pagrindinę įstrižainę, padalydamas daugiakampį į dvi lygias simetriškas dalis. Tuomet į kiekvieną savo priešininko ėjimą jis atsako simetrišku ėjimu, brėždamas įstrižainę, simetrišką centrinei pirmai įstrižainei.

5. Dvi mergaitės žaidžia tokį žaidimą: paeiliui skina ramunės žiedlapius. Vienu kartu galima nuskinti arba vieną, arba du gretimus žiedlapius. Laimi mergaitė, nuskynusi paskutinį žiedlapį. Įrodykite, kad antra mergaitė visada gali laimėti (laikoma, jog ramunė turi daugiau negu du žiedlapius).

P. Kokią simetriją savo ėjimu gali sukurti antra mergaitė?

S. Antrai mergaitei reikės savo pirmu ėjimu padaryti ramunę simetrišką (priklausomai nuo žiedlapių skaičiaus lyginumo ir to, kiek žiedlapių nuskynė pirma mergaitė, jai reikės nuskinti vieną arba du žiedlapius). Paskui antra mergaitė simetriškai kartoja pirmos ėjimus. Kadangi iš karto nuo abiejų ramunės „pusių“ žiedlapių skinti neįmanoma (žiedlapiai nebūtų gretimi), pirma mergaitė pralaimi.

11. Matematiniai žaidimai. B dalis

6. Turime dvi dėžutes su atitinkamai *a* ir *b* degtukų. Kiekvienu ėjimu galima atlikti tokius veiksmus: paimti degtuką iš kurios nors vienos dėžutės arba paimti po degtuką iš kiekvienos dėžutės, arba perdėti degtuką iš vienos dėžutės į kitą. Laimi tas, kuris paima paskutinį degtuką. Priklausomai nuo pradinių sąlygų, kurio iš žaidėjų strategija bus pergalinga?

P. Reikėtų panagrinėti, kaip spręsti uždavinį, jei bent vienoje dėžutėje yra nelyginis degtukų skaičius.

S. Jeigu iš pradžių bent vienoje dėžutėje yra nelyginis degtukų skaičius, pirmas žaidėjas užsitikrins pergalę, atlikdamas tokį ėjimą, kad abiejose dėžutėse butų po lyginį degtukų skaičių. Tada antras bus priverstas padaryti taip, kad bent vienoje dėžutėje būtų nelyginis degtukų skaičius ir t. t.