13. Dirichlė principas (Šeši zuikiai penkiuose narveliuose). A dalis

Įvadas

Mokytojui

Spręsdami uždavinius pagal Dirichlė principą mokiniai įgyja įrodinėjimo, argumentavimo patirties. Jo formuluotė paprasta ir tarsi savaime suprantama, tačiau pritaikymas dažnai reikalauja kūrybingumo ir intuicijos. Tai labai universalus principas, leidžiantis spręsti įvairius, kartais – labai sudėtingus uždavinius. Medžiagos apie Dirichlė principo panaudojimą galima rasti internete (angl. *Pigeonhole Principle*). Tačiau paprastam pristatymui ir susipažinimui pakaktų ir dalyje *Mokiniui* pateikiamos medžiagos ir pavyzdžių.

Modulis skirtas 5–6 klasių mokiniams, tačiau jei 7–8 klasių mokiniai tik pradeda aiškintis šią temą, jiems taip pat reikėtų pradėti nuo šios dalies.

Mokiniui

Klasikinė ir viena aiškiausių formuluočių
Jeigu šešis zuikius turime patalpinti į penkis narvelius, tai bent viename narvelyje bus ne mažiau kaip du zuikiai.

Apibendrintai
Jei į n narvelių turime patalpinti $(n \cdot k + 1)$ zuikį, tai bent viename narvelyje atsidurs ne mažiau kaip $k + 1$ zuikis.

Pastaba
Spręsdami uždavinius pagal Dirichlė metodą, negalime pasakyti, kuriame būtent „narvelyje" tupės tie du „zuikiai", todėl šis metodas iš esmės naudotinas egzistavimui įrodyti. Tačiau tų įrodymų gali būti daug ir įvairių.

Strategija

I. Išsiaiškinkite, kas yra „zuikiai" – tai, ko bent keli turi turėti kokią nors tą pačią savybę.
II. Susikurkite „narvelius". Reikia užtikrinti du dalykus: pirma, turi būti mažiau „narvelių" nei „zuikių"; antra, jei į „narvelį" paklius bent du „zuikiai", gausite tai, ko norite.
III. Raskite taisyklę, pagal kurią priskirsite „zuikius" į „narvelius". Kartais ne taip paprasta pritaikyti tinkamą taisyklę.

Štai keli elementarūs Dirichlė principo taikymo pavyzdžiai.

Kaip spręsti?

1 pavyzdys

Įrodykite, kad bet kurioje 13 žmonių grupėje atsiras bent du, kurie gimė tą patį mėnesį.

Atsakymas / sprendimas

Kadangi „zuikių" (žmonių) yra 13, o „narvelių" (mėnesių) – tik 12, tai įrodymas akivaizdus – kaip bepriskirtume žmones mėnesiams, bent vienam mėnesiui teks priskirti bent du žmones.

2 pavyzdys

Įrodykite, kad iš bet kurių trijų natūraliųjų skaičių galima išrinkti du, kurių suma dalytųsi iš 2.

Atsakymas / sprendimas

Visus natūraliuosius skaičius galima suskirstyti į dvi grupes: lyginius ir nelyginius. Taigi „narveliai" šiuo atveju yra lyginumas. Jei turime bet kokius tris natūraliuosius skaičius, tai bent du iš jų priklausys kuriam nors vienam „narveliui" – lyginiams arba nelyginiams skaičiams. Bet kokiu atveju jų suma bus lyginė (sudėję du lyginius arba du nelyginius skaičius, gauname lyginį skaičių). Taigi įrodyta.

13. Dirichlė principas (Šeši zuikiai penkiuose narveliuose). A dalis

Uždaviniai

1. Įrodykite, kad tarp bet kurių 6 skaičių atsiras du, kurių skirtumas dalysis iš 5.

P. Panagrinėkite dalybos iš 5 liekanas – tai galėtų būti „narveliai“. Kas tada bus „zuikiai“?

S. Nagrinėjame dalybos iš 5 liekanas (narvelius) – jos yra tik 5, todėl, dalijant 6 skaičius (zuikius) į šiuos narvelius, bent viename iš jų bus bent du zuikiai. Taigi bus bent du skaičiai, kuriuos dalijant iš 5 gaunama ta pati liekana, todėl jų skirtumas dalysis iš 5.

2. 31 diplomatas iš Graikijos, Italijos, Rusijos, Suomijos, Australijos ir Zimbabvės po susitikimo vakarieniavo kartu. Įrodykite, kad nors vienai šaliai atstovavo ne mažiau kaip 6 diplomatai.

P. Jei diplomatai šioje situacijoje būtų zuikiai, kas yra narveliai?

S. Diplomatai (31) – zuikiai, šalys (6) – narveliai, todėl bent viename narvelyje atsiras bent zuikiai.

3. 13 mokyklų atstovai dalyvavo atletinėse varžybose, kurių pažiūrėti susirinko 1 514 sirgalių. Įrodykite, kad bent už vieną mokyklą sirgo ne mažiau kaip 117 žmonių.

P. Gal ir negražu taip sakyti, bet mokyklas čia galėtume laikyti narveliais.

S. Sirgaliai (1514) – zuikiai, mokyklos (13) – narveliai; padalijus į narvelius, gauname, kad bent viename narvelyje bus bent 117 zuikių.

4. Įrodykite, kad Vilniuje gyvena bent du žmonės, turintys tiek pat plaukų ant galvos.

P. Reikėtų turėti omenyje, kad didžiausias galvos plaukų skaičius yra apie 100 000.

S. Vilniuje gyvena daugiau kaip 500 000 gyventojų, o didžiausias galvos plaukų skaičius yra apie 100 000. Taigi, zuikius (gyventojus) talpinant į narvelius (galvos plaukų skaičius), bent į vieną narvelį paklius bent du zuikiai, t. y. bent du žmonės turės vienodą plaukų skaičių.

5. Įrodykite, kad jei a, b, c yra sveikieji skaičiai, tai $(a-b)(b-c)(a-c)$ yra lyginis skaičius.

P. Kas čia zuikiai, o kas narveliai? Gal narveliai yra lyginiai ir nelyginiai skaičiai?

S. Yra 3 zuikiai (a, b, c) ir 2 narveliai (lyginis, nelyginis). Taigi bent 2 zuikiai pateks į vieną narvelį, todėl bent vienas iš skirtumų bus lyginis skaičius.

13. Dirichlė principas (Šeši zuikiai penkiuose narveliuose). A dalis

6. Švariai išplautų drabužių maišelyje yra 10 porų skirtingų kojinių, susimaišiusių tarpusavyje. Jei tamsoje, pakuodamiesi lagaminą, iš maišelio turėtumėte pasirinkti kojinių, kiek mažiausiai kojinių reikėtų paimti, kad būtumėte tikri, jog turėsite bent vieną porą kojinių?

P. Skirtingos poros (tarkime, jas sunumeruotume) – tebūnie narveliai. Kiek jų ir kiek zuikių reikia?

S. Atsakymas – 11. Kojinių (zuikių) bus 11, o narvelių (tarkime, tai skirtingos poros numeriai) – 10. Taigi bent į vieną narvelį paklius 2 zuikiai, t. y. turėsime bent vieną porą kojinių.

7. Tarkime, 7 studentai laiko egzaminą. Egzamine – keturi klausimai, o kiekvienas studentas pasirenka atsakinėti į lygiai 2 klausimus. Įrodykite, kad bus du studentai, pasirinkę tuos pačius 2 klausimus.

P. Suskaičiuokite, kiek yra galimų klausimų kombinacijų.

S. Narvelių – 6 (I ir II, I ir III, I ir IV, II ir III, II ir IV, III ir IV klausimai), o studentų (zuikių) – 7. Todėl, pagal Dirichlė principą, 2 studentai atsakinės į tuos pačius klausimus.