14. Dirichlė principas (Šeši zuikiai penkiuose narveliuose). B dalis

Įvadas

Mokytojui

Spręsdami uždavinius pagal Dirichlė principą mokiniai įgyją įrodinėjimo, argumentavimo patirties. Jo formuluotė paprasta ir tarsi savaime suprantama, tačiau pritaikymas dažnai reikalauja kūrybingumo ir intuicijos. Tai labai universalus principas, leidžiantis spręsti gana įvairius ir kartais net labai sudėtingus uždavinius. Medžiagos apie Dirichlė principo panaudojimą galima rasti internete (angl. *Pigeonhole Principle*). Tačiau paprastam pristatymui ir susipažinimui pakaktų ir dalyje *Mokiniui* pateikiamos medžiagos ir pavyzdžių.

Šis modulis tęsia A dalyje pradėtą temos nagrinėjimą ir yra skirtas 7–8 klasių mokiniams. Jei mokiniai tik pradeda aiškintis šią temą, iš pradžių reikėtų pradėti nuo A dalies.

Mokiniui

Klasikinė ir viena aiškiausių formuluočių

Jeigu šešis zuikius turime patalpinti į penkis narvelius, tai bent viename narvelyje bus ne mažiau kaip du zuikiai.

Apibendrintai

Jei į n narvelių turime patalpinti $(n \cdot k + 1)$ zuikį, tai bent viename narvelyje atsidurs ne mažiau kaip $k + 1$ zuikis.

Pastaba

Spręsdami uždavinius pagal Dirichlė metodą, negalime pasakyti, kuriame būtent „narvelyje" tupės tie du „zuikiai", todėl šis metodas iš esmės naudotinas egzistavimui įrodyti. Tačiau tų įrodymų gali būti daug ir įvairių.

Strategija

I. Išsiaiškinkite, kas yra „zuikiai" – tai, ko bent keli turi turėti kokią nors tą pačią savybę.
II. Susikurkite „narvelius". Reikia užtikrinti du dalykus: pirma, turi būti mažiau „narvelių" nei „zuikių"; antra, jei į „narvelį" paklius bent du „zuikiai", gausite tai, ko norite.
III. Raskite taisyklę, pagal kurią priskirsite „zuikius" į „narvelius". Kartais ne taip paprasta pritaikyti tinkamą taisyklę.

Štai keli elementarūs Dirichlė principo taikymo pavyzdžiai.

Kaip spręsti?

1 pavyzdys

Įrodykite, kad bet kurioje 13 žmonių grupėje atsiras bent du, kurie gimė tą patį mėnesį.

Atsakymas / sprendimas

Kadangi „zuikių" (žmonių) yra 13, o „narvelių" (mėnesių) – tik 12, tai įrodymas akivaizdus – kaip bepriskirtume žmones mėnesiams, bent vienam mėnesiui teks priskirti bent du žmones.

---

2 pavyzdys

Įrodykite, kad iš bet kurių trijų natūraliųjų skaičių galima išrinkti du, kurių suma dalytųsi iš 2.

Atsakymas / sprendimas

Visus natūraliuosius skaičius galima suskirstyti į dvi grupes: lyginius ir nelyginius. Taigi „narveliai" šiuo atveju yra lyginumas. Jei turime bet kokius tris natūraliuosius skaičius, tai bent du iš jų priklausys kuriam nors vienam „narveliui" – lyginiams arba nelyginiams skaičiams. Bet kokiu atveju jų suma bus lyginė (sudėję du lyginius arba du nelyginius skaičius, gauname lyginį skaičių). Taigi įrodyta.

14. Dirichlė principas (Šeši zuikiai penkiuose narveliuose). B dalis

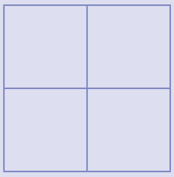
Kaip spręsti?

3 pavyzdys

Dirichlė principas taikomas ir kai kuriems geometriniams uždaviniams spręsti.

Įrodykite, kad tarp 5 taškų, esančių kvadrato, kurio kraštinė lygi 2, viduje atsiras du, tarp kurių esantis atstumas bus ne didesnis už $\sqrt{2}$.

Atsakymas / sprendimas



Jei kvadratą padalinsime į keturis lygius kvadratėlius, kurių kraštinė lygi 1 (kaip parodyta paveikslėlyje), tai, kaip bedėliotume 5 taškus kvadrato viduje, bent 2 taškai bus to paties kvadratėlio viduje (įskaitant ir kraštines). Atstumas tarp bet kokių dviejų taškų, esančių bet kurio mažojo kvadratėlio viduje, yra ne didesnis už $\sqrt{2}$. Ar galėtumėte tai įrodyti?

Panašiai sprendžiami ir kiti uždaviniai. Be abejo, sprendžiant kai kuriuos iš jų reikės truputį pasukti galvą.

Uždaviniai

1. Skaičiai 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ir 9 suskirstyti į tris grupes. Įrodykite, kad bent vienos grupės skaičių sandauga yra didesnė nei 71.

P. Jei visų trijų grupių skaičių sandaugos būtų ne didesnės nei 71, tai kam būtų lygi šių trijų sandaugų sandauga?

S. Padauginę visus skaičius nuo 1 iki 9, gauname 362 280. Kubinė šaknis iš šio skaičiaus didesnė nei 71, taigi, kaip beskirstytume skaičius į tris grupes, bent vienos grupės skaičių sandauga bus didesnė nei 71.

2. Įrodykite, kad bet kurioje žmonių grupėje egzistuos bent du, turintys tiek pat pažįstamų toje grupėje.

P. Jei žmonės šioje situacijoje yra zuikiai, tai kas yra narveliai? Kiek jų?

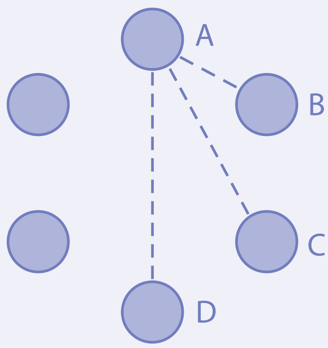
S. Tarkime, žmonių (zuikių) skaičius yra n. Jei kas nors pažįsta $n-1$ žmogų, tada $n-1$ žmogus pažįsta jį ir nėra tokio žmogaus, kuris nepažinotų nė vieno. Taigi narvelių (pažįstamų skaičiaus) yra daugiausiai $n-1$ (nuo 1 iki $n-1$). Jei nėra tokio žmogaus, kuris pažinotų visus likusius, tada pažįstamų skaičius gali būti nuo 0 iki $n-2$. Taigi $n-1$ variantas (narveliai). Turime n zuikių ir $n-1$ narvelį, todėl, pritaikius Dirichlė principą, bent 2 žmonės turės vienodą pažįstamų skaičių.

14. Dirichlė principas (Šeši zuikiai penkiuose narveliuose). B dalis

3. Įrodykite, kad tarp 6 žmonių visada bus bent 3 tarpusavyje pažįstami arba bent trys tarpusavyje nepažįstami.

P. Jei A yra vienas iš šių šešių žmonių, tada iš likusių penkių arba bent trys bus A pažįstami, arba bent trys bus A nepažįstami.

S. Tarkime, A – vienas iš šių šešių žmonių. Tada iš likusių penkių arba bent trys bus A pažįstami, arba bent trys bus A nepažįstami, sakykime, pažįstami (pasižymime juos B, C ir D). 1 paveikslėlyje skrituliukai žymi šiuos 6 žmones, o punktyrinė linija – pažinties ryšį. Galimi du atvejai.



1 pav.

1 *atvejis.* Jokie du iš B, C ir D nepažįsta vienas kito. Tada jie ir sudarys trijų tarpusavy nepažįstamų grupę.

2 *atvejis.* Jeigu bent kuri nors pora pažinos vienas kitą, galėsime tarp jų taip pat nubrėžti pažinties liniją. Gausime trijų tarpusavyje pažįstamų žmonių grupę.

4. Lygiakraščio trikampio, kurio kraštinė lygi 1, viduje yra 5 taškai. Įrodykite, kad tarp jų atsiras du taškai, tarp kurių atstumas bus ne didesnis už $\frac{1}{2}$. Įrodykite, kad jei šio trikampio viduje paimsime 10 taškų, tai atsiras du, tarp kurių atstumas bus ne didesnis už $\frac{1}{3}$.

P. Jei taškai yra zuikiai, tai į kiek narvelių reikėtų padalinti šį trikampį?

S. Per lygiakraščio trikampio kraštinių vidurio taškus padaliname trikampį į 4 lygius lygiakraščius trikampius. Kadangi taškų (zuikių) yra 5, o trikampėlių (narvelių) – 4, tai bent viename trikampiuke bus 2 taškai. Nesunkiai parodoma, kad atstumas tarp jų bus ne didesnis už $\frac{1}{2}$.

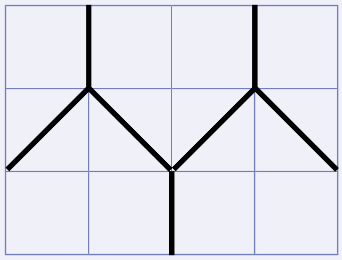
5. Vienetiniame kvadrate yra 51 taškas. Įrodykite, kad kokius nors tris iš jų galima padengti apskritimu, kurio spindulys lygus $\frac{1}{7}$.

P. Kiek narvelių reikėtų turėti, kad, išdalijus 51 zuikį (tašką), bent viename narvelyje atsidurtų bent 3 iš jų?

S. Padalinkime kvadratą į 25 lygius kvadratėlius $\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}$. Remiantis Dirichlė principu, bent viename iš šių kvadratėlių bus bent 3 taškai. Belieka parodyti, jog tokį kvadratėlį galima uždengti apskritimu, kurio spindulys $\frac{1}{7}$. Iš tiesų $\frac{2}{7} > \sqrt{2}\cdot\frac{1}{5}$, nes $\frac{4}{49} > \frac{4}{50} = \frac{2}{25}$.

14. Dirichlė principas (Šeši zuikiai penkiuose narveliuose). B dalis

6. Stačiakampyje, kurio matmenys 3×4, yra 6 taškai. Įrodykite, kad tarp jų atsiras 2 taškai, tarp kurių atstumas bus ne didesnis už $\sqrt{5}$.



2 pav.

P. Kadangi šeši taškai aiškiai yra zuikiai, svarbu sugalvoti, kaip padalinti šį stačiakampį į penkis narvelius.

S. Padalinkime stačiakampį į 5 dalis, kaip parodyta 2 paveikslėlyje. Akivaizdu, kad, remiantis Dirichlė principu, bent vienoje iš šių dalių bus bent 2 taškai, kadangi dalių (narvelių) yra 5, o taškų (zuikių) – 6. Tereikia parodyti, kad atstumas tarp bet kurių taškų tose dalyse yra ne didesnis už $\sqrt{5}$. Tą visai nesunku padaryti.

7. Plokštumoje duoti 25 taškai. Be to, tarp bet kurių 3 iš jų atsiras 2 tokie, tarp kurių atstumas bus mažesnis už 1. Įrodykite, kad egzistuoja apskritimas su spinduliu, kurio viduje bus ne mažiau 13 šių taškų.

P. 25 taškus reikėtų dalinti į 2 grupes / apskritimus (narvelius), kad vienoje būtų ne mažiau nei 13 taškų. Kaip? Iš pradžių pasirinkime bet kurį tašką (tarkime, A) ir apibrėžkime apie jį (kaip centrą) apskritimą, kurio spindulys bus lygus 1. Jeigu šio apskritimo viduje bus ne mažiau kaip 13 taškų, tai jau gavome, ką norėjome. Ką daryti, jeigu ne?

S. Pasirinkime bet kurį tašką (tarkime, A) ir apibrėžkime apie jį (kaip centrą) apskritimą, kurio su spindulys lygus 1. Jeigu šio apskritimo viduje bus ne mažiau kaip 13 taškų, tai jau gavome, ką norėjome. Jeigu ne, laisvai pasirinkę apskritimo išorėje esantį tašką (tarkime, B), apie jį (kaip centrą) taip pat apibrėžkime apskritimą, kurio spindulys bus lygus 1. Bet kuris iš 25 taškų bus kurio nors iš šių dviejų apskritimų viduje: iš tiesų, jei būtų toks taškas C, kuris nebūtų nė vieno iš šių apskritimų viduje, tai reikštų, kad atstumas $AC > 1$ ir $BC > 1$. Bet ir $AB > 1$ (nes taškas B nebuvo pirmojo apskritimo viduje). Taigi nepatenkinama uždavinio sąlyga, kad tarp bet kurių 3 taškų atsiras 2 tokie, tarp kurių atstumas bus mažesnis už 1. Gauname prieštarą. Taigi visi 25 taškai pakliūna į kurio nors iš šių dviejų vienetinių apskritimų vidų. 25 taškai – zuikiai, 2 apskritimai – narveliai, bent viename narvelyje bus bent 13 zuikių.