15. Invariantai (Šachmatų lentos uždaviniai ir ne tik). A dalis

Įvadas

Mokytojui

Invariantų tema yra gana universali ir šios taktikos panaudojimo galimybių yra tikrai daug. Čia pateikiami tik kai kurie šios temos uždaviniai, bet ir jie leis susipažinti su šiuo metodu bei įgauti įgūdžių ieškoti, atrasti, o kartais ir „sukurti“ tai, kas nekinta (invariantus). Medžiagoje mokiniui pateikti keli pavyzdžiai ir jų paaiškinimai pristato invariantų temą ir pagrindinius žingsnius.

Numatoma, kad šis moduliukas (A dalis) gali būti naudojamas jau dirbant su stipresniais 5–6 klasių mokiniais, tačiau jis puikiai tiks ir 7–8 klasių mokiniams, ypač jei jie tik pradeda aiškintis šią temą.

Mokiniui

Pirmiausia panagrinėkime grupę uždavinių, kuriuos galime spręsti invariantų metodu ir kurių dauguma yra susiję su vadinamaisiais „šachmatų lentos“ uždaviniais.

Kaip spręsti?

1 pavyzdys

Turime 8×8 šachmatų lentą ir domino kauliukų rinkinį (1×2 stačiakampiukų). Tarkime, šachmatų lentoje iškirpome vieną jos kampinį langelį. Ar bus įmanoma padengti likusius šachmatų lentos langelius domino kauliukais?

Atsakymas / sprendimas

Be abejo, ne. Iškirpus vieną langelį (nesvarbu kurį), liks 63 langeliai, t. y. nelyginis langelių skaičius. Kaip bedėliotume domino kauliukus, jais galėsime padengti tik lyginį skaičių langelių.

Šis paprastutis uždavinys aiškiai pademonstruoja metodą, leidžiantį spręsti ir kur kas sudėtingesnius uždavinius. Yra daugybė uždavinių, kuriuose reikia kažką išsiaiškinti apie galutinę „sistemos“ būseną, kai ją („sistemą“) galima įvairiai keisti (šiuo atveju galėjome visaip kaitalioti domino kauliukų išdėstymą; turėjome išsiaiškinti, ar tokiu būdu pavyks padengti šachmatų lentą). Aiškėja, jog perrinkti visus įmanomus variantus yra labai sunku ar net neįmanoma (net ir šiame paprastame uždavinyje perrinkinėti visus variantus, „nepametant“ nė vieno, nelengva). Tačiau kartais egzistuoja tam tikras dydis, kuris nekinta viso „sistemos“ kitimo metu. Šis dydis ir vadinamas *invariantu*. Gali būti, jog išsiaiškinus tą nekintantį dydį bus įmanoma kai ką nuspręsti ir apie galutinę „sistemos“ būseną, t. y. atsakyti į uždavinio klausimą. Kartais tas invariantas yra labai lengvai pastebimas (tarkime, duotame pavyzdyje tai buvo langelių skaičiaus lyginumas), kartais jį kur kas sunkiau pastebėti arba reikia imtis papildomų veiksmų (pavyzdžiui, įvairių „spalvinimų“) tam, kad „sukurtume“ invariantą. Bet kokiu atveju, šis metodas gali būti labai veiksmingas. Jis ypač dažnai naudojamas įvairiems „šachmatų lentos“ uždaviniams spręsti ir ne tik. Svarbu išmokti pastebėti tai, kas galėtų būti invariantu.

Invariantų lengviausia mokytis nagrinėjant pavyzdžius. Todėl pateiksime dar keletą pavyzdžių, kurie padės suprasti metodo idėją.

15. Invariantai (Šachmatų lentos uždaviniai ir ne tik). A dalis

Kaip spręsti?

2 pavyzdys

Iš šachmatų lentos priešingų kampų išpjauname po 1 langelį. Ar šiuo atveju galėsime domino kauliukais padengti šachmatų lentą?

Atsakymas / sprendimas

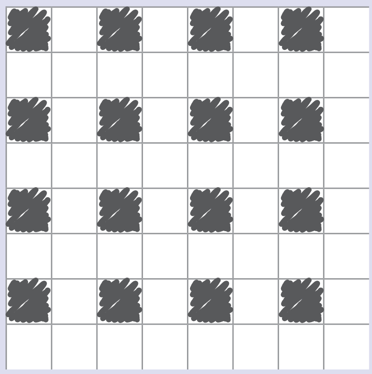
Ne, negalima. Bus išpjauti 2 juodi arba 2 balti langeliai. Tarkime, juodi. Tada liks 30 juodų ir 32 balti langeliai, kuriuos reikės padengti. Tam, kad padengtume šiuos 62 likusius langelius, turėsime panaudoti 31 domino kauliuką, bet jie negalės padengti 32 baltų ir 30 juodų langelių, nes kiekvienas domino kauliukas dengia lygiai 1 juodą ir 1 baltą langelį.

3 pavyzdys

Stačiakampės dėžutės dugnas buvo padengtas 1×4 ir 2×2 stačiakampėmis plytelėmis. Išpylus plyteles iš dėžutės, viena 2×2 plytelė pasimetė. Vietoj jos buvo pasiūlyta 1×4 plytelė. Įrodykite, kad dabar nepavyks plytelėmis padengti dėžutės dugno.

Atsakymas / sprendimas

Čia su paprasta šachmatų lenta neišsiversime. Reikia „nudažyti“ langelius, kaip pavaizduota 1 pav. Nagrinėkime, kiek juodų langelių tokiu atveju dengs 2×2 ir 1×4 plytelės: bet kuri 2×2 plytelė dengs lygiai 1 juodą langelį, o 1×4 plytelė dengs 0 arba 2 juodus langelius. Taigi ir vėl, kaip besistengtume, pakeitus 2×2 plytelę 1×4 plytele, nepavyktų padengti dėžutės dugno („kirsis“ lyginumas).



1 pav.

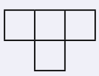
Čia nagrinėjome vadinamuosius „šachmatų lentos“ uždavinius. Šio tipo uždaviniai pateikti pirmiausiai. Tačiau invariantų uždaviniai tikrai neapsiriboja tokio tipo uždaviniais. Kaip minėjome, *invariantu* gali būti bet kokia nagrinėjamos „sistemos“ savybė, kuri išlieka nepakitusi įvairiai kaitaliojant pačią sistemą. Labai dažnai tai yra lyginumas arba apskritai dalumas. Pabandykite tuo remtis ir surasti *invariantus* vėlesniuose uždaviniuose (dažniausiai reikės remtis dalumo savybėmis).

Uždaviniai

1. Ar galima 10×10 šachmatų lentą padengti T formos figūrėlėmis, turinčiomis 4 langelius[1]?

P. Nagrinėkite, kiek juodų langelių dengia kiekviena figūrėlė ir koks bus visų uždengtų juodų langelių lyginumas (lyginis ar nelyginis skaičius).

S. Ne, nes kiekviena figūrėlė dengia 1 arba 3 juodus langelius. Iš viso reikia 25 figūrėlių. Jos galės padengti tik nelyginį juodų langelių skaičių, o reikia padengti 50 (t. y. lyginį skaičių) juodų langelių.

1  T formos figūrėlė iš 4 langelių.

15. Invariantai (Šachmatų lentos uždaviniai ir ne tik). A dalis

2. Turime šachmatų lentą. Leidžiama atlikti tokią operaciją – perdažyti vienos eilutės arba vieno stulpelio visus langelius priešingomis spalvomis. Ar įmanoma tokiu būdu pasiekti, kad liktų tik vienas juodas langelis?

P. Pažiūrėkite, kaip keičiasi juodų langelių skaičius perdažant bet kurią eilutę.

S. Pastebime, jog perdažant bet kurią eilutę (arba stulpelį) juodų langelių skaičius keičiasi lyginiu skaičiumi. Todėl, kaip mes beatliktume šias operacijas, niekaip negausime vieno juodo langelio.

3. Šachmatų lentoje galime priešingomis spalvomis perdažyti visus langelius, esančius 2×2 kvadratėlyje, dengiančiame 4 šachmatų lentos langelius. Ar po kelių tokių operacijų galėtume gauti lentą su vienu baltu langeliu?

P. Sprendimas analogiškas 2 uždavinio sprendimui.

4. Ant lentos užrašoma 10 pliusų ir 15 minusų. Leidžiama nutrinti bet kuriuos du ženklus ir vietoj jų parašyti pliusą, jei tie ženklai sutampa, arba minusą, jei jie skirtingi. Koks ženklas galiausiai liks lentoje (po 24 operacijų)?

P. Pabandykite pliusus pakeisti į 1, o minusus pakeisti į –1 ir nagrinėti visų skaičių sandaugą.

S. Galima kiekvieną pliusą pakeisti 1, o minusą pakeisti –1 ir nagrinėti visų skaičių sandaugą. Iš pradžių ji yra lygi –1, o atlikdami kiekvieną keitimo operaciją gauname tų dviejų skaičių sandaugą. Taigi sandauga nekinta, todėl galiausiai likusi sandauga bus lygi –1. Vadinasi, liks –1, t. y. minusas. Taip pat galima pliusus keisti 0, o minusus 1 ir nagrinėti visų skaičių sumą. Pastebėsime, jog suma, atliekant keitimus, keičiasi lyginiu skaičiumi (išlaiko savo lyginumą). Jei iš pradžių ji buvo nelyginė (15), galiausiai galės likti tik 1, t. y. minusas. Analogiškai galime nagrinėti minusų skaičiaus kitimą – jis taip pat kis lyginiu skaičiumi, t. y. išlaikydamas lyginumą. Todėl liks 1 minusas.

5. Ant lentos užrašytas tam tikras pliusų bei minusų skaičius. Leidžiama nutrinti bet kuriuos du ženklus ir vietoj jų parašyti pliusą, jei tie ženklai skirtingi, ar minusą, jei jie sutampa. Įrodykite, kad paskutinis ženklas, likęs lentoje, nepriklausys nuo to, kokia tvarka trinsime.

P. Samprotauti panašiai kaip 4 uždavinyje.

6. Šachmatų lentos 5×5 kiekviename langelyje tupi po vabalą. Kažkuriuo momentu visi vabalai perropoja į kaimyninį (horizontaliai ar vertikaliai) langelį. Įrodykite, kad tokiu atveju liks bent vienas tuščias langelis (be ant jo tupinčio vabalo).

P. Panagrinėkite, kiek lentoje yra juodų ir kiek baltų langelių.

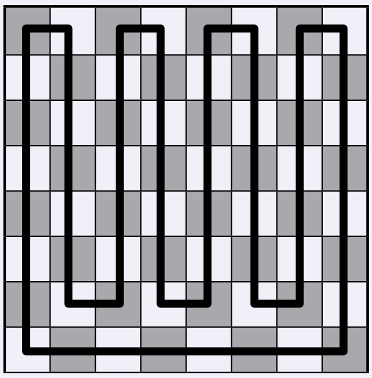
S. Kadangi 5×5 šachmatų lentos langelių skaičius yra nelyginis, tai baltų ir juodų langelių negali būti vienodai. Tarkime, daugiau yra juodų langelių. Tada vabalų, tupinčių ant baltų langelių, mažiau nei juodų langelių. Todėl bent vienas juodas langelis liks tuščias, nes ant juodų langelių atropos tik tie vabalai, kurie iš pradžių tupėjo ant baltų langelių.

15. Invariantai (Šachmatų lentos uždaviniai ir ne tik). A dalis

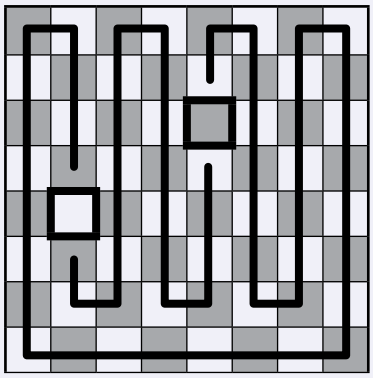
7. Įrodykite, kad pavyks padengti šachmatų lentą domino kauliukais, jei išpjausime po 1 skirtingos spalvos langelį. Kokį metodą taikysite, nepriklausomai nuo to, kurie langeliai bus išpjauti.

P. Čia galima nagrinėti daug domino sudėliojimo strategijų, atsižvelgiant į vienokias ar kitokias išpjautų langelių padėtis. Bet tuomet invariantų metodo panaudojimo galimybių būtų nedaug. Be abejo, invariantų metodas dažniausiai tinka uždaviniams, kur atsakymas yra „ne“ (beje, tik atsakymas, kad yra „neįmanoma“, „negalima“ arba „nepavyks“, tikrai dar nėra tokių uždavinių sprendimas; tokie atsakymai labai mažai ko verti, jei nėra įrodomi, nes paprastai jie akivaizdūs, o visa išmintis – parodyti, kad tikrai jokiais būdais tas „ne“ nepasitvirtins). Tačiau kartais invariantų metodą (nors paprastai ne taip akivaizdžiai) galima pritaikyti ir teigiamam atsakymui pagrįsti. Pavyzdžiui, šiame uždavinyje. Pabandykite rasti būdą, kaip sujungti visus šachmatų lentos langelius, kad vėliau, išpjovus du skirtingos spalvos langelius, būtų akivaizdus padengimo domino kauliukais galimumas.

S. Tarkime, kad turime šachmatų lentą (kol kas dar be išpjautų langelių). Sujunkime („pereikime“) langelius ištisine linija, kaip parodyta 6 pav. Linija jungia (arba „padengia“) visus lentos langelius. Dabar, tarkime, kad išpjaunami bet kurie (!) du skirtingų spalvų langeliai. Tada ši linija dviejose vietose „nutrūksta“ (žr. 7 pav.). Linija buvo ištisinė, o nutrūko ties baltu ir juodu langeliais; naujai susidariusios dvi linijos prasidės vienos spalvos, o baigsis kitos spalvos langeliu – taigi kiekviena nauja linija eis per lyginį langelių skaičių, todėl šias dvi linijas (atstovaujančias likusiai šachmatų lentos daliai) bus galima padengti dviem „ištisinėmis“ domino kauliukų eilėmis / linijomis. Kaip matome, taip samprotaudami (pasirinkę ištisinę liniją), nepriklausomai nuo to, kokiose vietose bus išpjauti skirtingų spalvų langeliai, gausime dvi linijas su lyginiu dengiamų langelių skaičiumi (tas lyginumas ir bus invariantas).



6 pav.



7 pav.