16. Invariantai (Šachmatų lentos uždaviniai ir ne tik). B dalis

Įvadas

Mokytojui

Invariantų tema gana universali ir šios taktikos panaudojimo galimybių yra tikrai daug. Čia pateikiami tik kai kurie šios temos uždaviniai, bet ir jie leis susipažinti su šiuo metodu, siekiant atrasti, o kartais ir „sukurti“ tai, kas nekinta (invariantus). Medžiagoje mokiniui pateikti keli pavyzdžiai ir jų paaiškinimai pristato invariantų temą ir pagrindinius žingsnius.

Modulis skirtas jau pažengusiems 7–8 klasių mokiniams. Jei jie tik pradeda aiškintis šią temą, derėtų pradėti nuo A dalies.

Mokiniui

Pirmiausia panagrinėkime grupę uždavinių, kuriuos galime spręsti invariantų metodu ir kurių dauguma yra susiję su vadinamaisiais „šachmatų lentos“ uždaviniais.

Kaip spręsti?

1 pavyzdys

Turime 8x8 šachmatų lentą ir domino kauliukų rinkinį (1x2 stačiakampiukų). Tarkime, šachmatų lentoje iškirpome vieną jos kampinį langelį. Ar bus įmanoma padengti likusius šachmatų lentos langelius domino kauliukais?

Atsakymas / sprendimas

Be abejo, ne. Iškirpus vieną langelį (nesvarbu kurį), liks 63 langeliai, t. y. nelyginis langelių skaičius. Kaip bedėliotume domino kauliukus, jais galėsime padengti tik lyginį skaičių langelių.

Šis paprastutis uždavinys aiškiai pademonstruoja metodą, leidžiantį spręsti ir kur kas sudėtingesnius uždavinius. Yra daugybė uždavinių, kuriuose reikia kažką išsiaiškinti apie galutinę „sistemos“ būseną, kai ją („sistemą“) galima įvairiai keisti (šiuo atveju galėjome visaip kaitalioti domino kauliukų išdėstymą; turėjome išsiaiškinti, ar tokiu būdu pavyks padengti šachmatų lentą). Aiškėja, jog perrinkti visus įmanomus variantus yra labai sunku ar net neįmanoma (net ir šiame paprastame uždavinyje perrinkinėti visus variantus, „nepametant“ nė vieno, nelengva). Tačiau kartais egzistuoja tam tikras dydis, kuris nekinta viso „sistemos“ kitimo metu. Šis dydis ir vadinamas *invariantu*. Gali būti, jog išsiaiškinus tą nekintantį dydį bus įmanoma kai ką nuspręsti ir apie galutinę „sistemos“ būseną, t. y. atsakyti į uždavinio klausimą. Kartais tas invariantas yra labai lengvai pastebimas (tarkime, duotame pavyzdyje tai buvo langelių skaičiaus lyginumas), kartais jį kur kas sunkiau pastebėti arba reikia imtis papildomų veiksmų (pavyzdžiui, įvairių „spalvinimų“) tam, kad „sukurtume“ invariantą. Bet kokiu atveju, šis metodas gali būti labai veiksmingas. Jis ypač dažnai naudojamas įvairiems „šachmatų lentos“ uždaviniams spręsti ir ne tik. Svarbu išmokti pastebėti tai, kas galėtų būti invariantu.

Invariantų lengviausia mokytis nagrinėjant pavyzdžius. Todėl pateiksime dar keletą pavyzdžių, kurie padės suprasti metodo idėją.

16. Invariantai (Šachmatų lentos uždaviniai ir ne tik). B dalis

Kaip spręsti?

2 pavyzdys

Iš šachmatų lentos priešingų kampų išpjauname po 1 langelį. Ar šiuo atveju galėsime domino kauliukais padengti šachmatų lentą?

Atsakymas / sprendimas

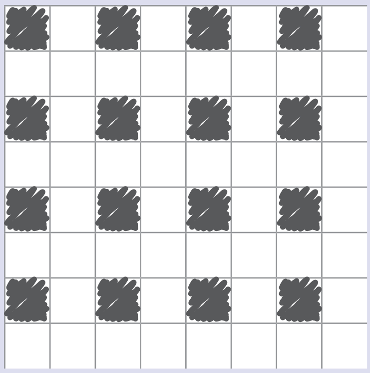
Ne, negalima. Bus išpjauti 2 juodi arba 2 balti langeliai. Tarkime, juodi. Tada liks 30 juodų ir 32 balti langeliai, kuriuos reikės padengti. Tam, kad padengtume šiuos 62 likusius langelius, turėsime panaudoti 31 domino kauliuką, bet jie negalės padengti 32 baltų ir 30 juodų langelių, nes kiekvienas domino kauliukas dengia lygiai 1 juodą ir 1 baltą langelį.

3 pavyzdys

Stačiakampės dėžutės dugnas buvo padengtas 1×4 ir 2×2 stačiakampėmis plytelėmis. Išpylus plyteles iš dėžutės, viena 2×2 plytelė pasimetė. Vietoj jos buvo pasiūlyta 1×4 plytelė. Įrodykite, kad dabar nepavyks plytelėmis padengti dėžutės dugno.

Atsakymas / sprendimas

Čia su paprasta šachmatų lenta neišsiversime. Reikia „nudažyti“ langelius, kaip pavaizduota 1 pav. Nagrinėkime, kiek juodų langelių tokiu atveju dengs 2×2 ir 1×4 plytelės: bet kuri 2×2 plytelė dengs lygiai 1 juodą langelį, o 1×4 plytelė dengs 0 arba 2 juodus langelius. Taigi ir vėl, kaip besistengtume, pakeitus 2×2 plytelę 1×4 plytele, nepavyktų padengti dėžutės dugno („kirsis“ lyginumas).



1 pav.

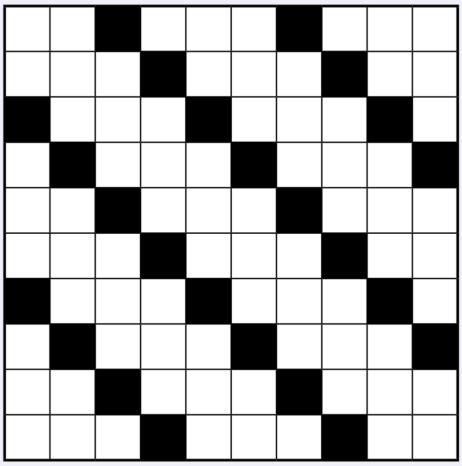
Čia nagrinėjome vadinamuosius „šachmatų lentos“ uždavinius. Šio tipo uždaviniai pateikti pirmiausiai. Tačiau invariantų uždaviniai tikrai neapsiriboja tokio tipo uždaviniais. Kaip minėjome, *invariantu* gali būti bet kokia nagrinėjamos „sistemos“ savybė, kuri išlieka nepakitusi įvairiai kaitaliojant pačią sistemą. Labai dažnai tai yra lyginumas arba apskritai dalumas. Pabandykite tuo remtis ir surasti *invariantus* vėlesniuose uždaviniuose (dažniausiai reikės remtis dalumo savybėmis).

16. Invariantai (Šachmatų lentos uždaviniai ir ne tik). B dalis

Uždaviniai

1. Ar galima 10x10 šachmatų lentą padengti 1x4 plytelėmis?

P. Čia reikėtų pabandyti atrasti tokį lentos nudažymo būdą, kur viena plytele padengtumėte, pavyzdžiui, tik vieną tamsų langelį.



1 pav.

S. Nudažius lentą tokiu būdu matome, kad ant jos bet kur uždėta 1x4 plytelė dengs 1 tamsų ir 3 šviesius langelius. Kadangi lentoje yra 24 tamsūs langeliai, galimos tik 24 plytelės. Jos iš viso dengs 96 langelius; 4 balti lentos langeliai liks neuždengti. Dar vienos 1x4 plytelės neišeis padėti, nes ji dengia 1 tamsų langelį, o tokių neuždengtų lentoje nebeliko. Taigi 10x10 lentos uždengti 1x4 plytelėmis neįmanoma.

2. Lentelėje 4x4 surašyti pliusai ir minusai kaip parodyta 2 paveikslėlyje. Leidžiama keisti ženklus priešingais vienu metu visuose langeliuose, esančiuose viename stulpelyje, vienoje eilutėje, vienoje įstrižainėje ar tiesėje, lygiagrečioje bet kuriai įstrižainei (taip pat ir bet kuriame kampiniame langelyje).

a) Ar įmanoma, atliekant šias operacijas, gauti lentelę, kurioje nebūtų nė vieno minuso?
b) Išspręskite šį uždavinį lentelei, pavaizduotai 3 paveikslėlyje.

+	+	–	+
+	+	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+

2 pav.

+	+	–	+	+	+
+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+

3 pav.

P. Čia reikėtų pabandyti atrasti tokį lentos užtušavimo būdą, kad, sukeitus pliusus į 1, o minusus į –1, nagrinėdami sandaugas užtušuotuose langeliuose gautume, jog sandauga išlieka lygi –1, kaip bekeistume ženklus.

S. a) Sukeitę pliusus į 1, o minusus į –1, nagrinėjame sandaugas užtušuotuose langeliuose (žr. 4 pav.). Pastebime, jog sandauga išlieka lygi –1, kaip bekeistume ženklus. Taigi, galiausiai tuose užtušuotuose langeliuose vis tiek liks bent vienas minusas.
b) Analogiškai užtušuojame (žr. 5 pav.).

+	+	–	+
+	+	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+

4 pav.

+	+	–	+	+	+
+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+

5 pav.

16. Invariantai (Šachmatų lentos uždaviniai ir ne tik). B dalis

3. Ant lentos užrašyta keletas nuliukų, vienetukų bei dvejetukų. Leidžiama nutrinti bet kuriuos du nelygius skaičius ir vietoj jų parašyti skaičių, nelygų nė vienam iš jų (t. y. 0 vietoj 1 ir 2, 1 vietoj 0 ir 2, 2 vietoj 0 ir 1). Įrodykite, kad jeigu po kelių tokių operacijų lentoje liks tik vienas skaičius, tai jis nepriklausys nuo to, kokia tvarka vyko trynimas.

P. Panagrinėkite, kaip su kiekvienu ėjimu keičiasi nuliukų, vienetukų ir dvejetukų skaičių lyginumas.

S. Nagrinėjame atitinkamai nuliukų, vienetukų bei dvejetukų skaičius: n_0, n_1 ir n_2. Po kiekvieno pakeitimo du iš jų sumažėja vienetu, o trečias vienetu padidėja. Taigi jų visų lyginumas kartu pasikeičia. Ir taip kiekvieną kartą. Galiausiai, jeigu gauname, jog lieka kažkuris vienas iš tų skaičių, reiškia, jog tų skaičių skaičiaus lyginumas skyrėsi nuo kitų dviejų skaičių kiekio lyginumo. Vadinasi, kaip nors kitaip atlikdami procedūras taip pat negalėsime gauti, jog kuris nors kitas liktų (jo lyginumas bus toks pats kaip ir kito, tad jis negalės likti vienas, o kitų – po nulį).

4. Ar įmanoma ant languoto popieriaus nuspalvinti 25 langelius taip, jog kiekvienas langelis turėtų nelyginį skaičių nuspalvintų kaimyninių langelių? (Kaimyniniais langeliais vadinami tie, kurie turi bendrą kraštinę.)

P. Koks gi iš viso nuspalvintų kraštinių skaičius, nagrinėjant nuspalvintų langelių, turinčių vieną, du, tris ar keturis nuspalvintus „kaimynus“, skaičius?

S. Pasižymime nuspalvintų langelių, turinčių vieną nuspalvintą „kaimyną“, skaičių n_1, turinčių du nuspalvintus „kaimynus“ – n_2, tris – n_3, keturis – n_4. Dabar skaičiuokime „bendrų“ nuspalvintų kraštinių skaičių N.

$$N=\frac{1}{2}(n_1+2n_2+3n_3+4n_4)=\frac{1}{2}(n_1+n_3)+n_2+n_3+2n_4\,.$$

Kadangi N – sveikasis skaičius, tai n_1+n_3 turi būti lyginis skaičius, t. y. langelių, turinčių nelyginį skaičių „kaimynų“, skaičius gali būti tik lyginis (negali būti 25).

5. Iš pradžių didžiulė salė yra tuščia. Kiekvieną minutę į kambarį arba įeina vienas žmogus, arba du išeina. Ar gali po 3^{1999} minučių salėje būti $3^{1000}+2$ žmonės?

P. Panagrinėkite, koks yra skirtumas tarp dviejų galimų žmonių skaičiaus pokyčių kiekvieną minutę.

S. Jei kažkuriuo momentu salėje yra n žmonių, tai po vienos minutės salėje bus $n+1$ arba $n-2$ žmonės. Skirtumas tarp šių dviejų galimų žmonių skaičių yra 3. Tęsdami toliau, matome, kad bet kuriuo laiko momentu visi galimi žmonių skaičiaus variantai skiriasi vienas nuo kito per 3 kartotinį. Po 3^{1999} minučių vienas iš galimų žmonių skaičiaus salėje variantų būtų 3^{1999} (jei kiekvieną minutę į salę įeitų po vieną žmogų). Taigi visi kiti variantai turėtų skirtis nuo 3^{1999} per skaičiaus 3 kartotinį, t. y. dalintis iš 3. Todėl akivaizdu, kad $3^{1000}+2$ negali būti tinkamu variantu.

16. Invariantai (Šachmatų lentos uždaviniai ir ne tik). B dalis

6. Ant stalo yra *a* juodų, *b* baltų ir *c* raudonų kamuoliukų. Vienu žingsniu galite pasirinkti bet kuriuos du skirtingų spalvų kamuoliukus ir pakeisti juos vienu trečios spalvos kamuoliuku. Jeigu galiausiai liks tik vienas kamuoliukas, jo spalva nepriklausys nuo to, kokia tvarka vyks pakeitimai. Kokiu atveju gali būti pasiekta tokia galutinė situacija?

P. Panagrinėkite, kaip kiekviename žingsnyje keičiasi skirtingų spalvų rutuliukų skaičiaus lyginumas.

S. Kiekvienu žingsniu kiekvienos spalvos kamuoliukų skaičius (*a*, *b* ir *c*) pakeičia savo lyginumą. Jeigu kurios nors spalvos kamuoliukų skaičiaus lyginumas iš pradžių skiriasi nuo kitų dviejų spalvų kamuoliukų lyginumo, jis šią savybę išlaikys iki pabaigos. Šios spalvos kamuoliukas ir liktų paskutinis.

7. Kiekvienas iš skaičių nuo 1 iki 10^6 yra pakartotinai keičiamas savo skaitmenų suma tol, kol turime 10^6 vienaženklių skaičių. Šioje situacijoje bus daugiau 1-tų ar 2-tų?

P. Panagrinėkite skaičių liekanas dalijant iš 9 (mod 9). Ar jos kinta, keičiant skaičių jo skaitmenų suma?

S. Nagrinėkime kiekvieno skaičiaus liekaną mod 9. Ji yra invariantas (tikriausiai galėtumėte nesunkiai įrodyti, juk esate girdėję apie dalumo iš 9 požymį). Kadangi $10^6 = 1 \bmod 9$, tai vienetukų liks daugiau nei dvejetukų.

8. Didelėje tarptautinėje konferencijoje dalyviai pasisveikina paspausdami rankas. Konferencijos dalyvį vadinsime „nelyginiu“, jei jis paspaudė rankas nelyginį skaičių kartų. Kitu atveju dalyvį vadinsime „lyginiu“. Įrodykite, kad bet kuriuo momentu yra lyginis skaičius „nelyginių“ dalyvių.

P. Ar „nelyginių“ dalyvių skaičiaus lyginumas keičiasi?

S. Suskirstykime konferencijos dalyvius į aibes *L* („lyginiai“ dalyviai) ir *N* („nelyginiai“ dalyviai). Aibės *N* skaičius nekeičia savo lyginumo: jei du „nelyginiai“ dalyviai paspaudžia vienas kitam rankas, *N* skaičius sumažėja 2, jei du „lyginiai“ dalyviai paspaudžia vienas kitam rankas, *N* skaičius padidėja 2, o jei „lyginis“ ir „nelyginis“ dalyviai paspaudžia vienas kitam rankas, *N* skaičius lieka nepakitęs. Kadangi iš pradžių *N* skaičius yra lygus 0, tai bet kuriuo momentu yra lyginis skaičius „nelyginių“ dalyvių.

16. Invariantai (Šachmatų lentos uždaviniai ir ne tik). B dalis

9. Apskritimas padalintas į 6 sektorius. Tada į sektorius (tarkime, pagal laikrodžio rodyklę) įrašyti skaičiai 1, 0, 1, 0, 0, 0. Vienu ėjimu galima padidinti du šalia esančius skaičius vienetu. Ar atlikus kažkiek tokių ėjimų įmanoma sulyginti visus skaičius?

P. Jei $a_1, a_2, ..., a_6$ yra ant apskritimo esantys skaičiai (nesvarbu, kuriuo momentu), ką galima pasakyti apie skaičių $I = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6$?

S. Tarkime, $a_1, a_2, ..., a_6$ yra ant apskritimo esantys skaičiai (nesvarbu, kuriuo momentu). Tada skaičius $I = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6$ yra invariantas (ar akivaizdu kodėl?). Pradiniu momentu $I = 2$, todėl neįmanoma pasiekti trokštamo varianto $I = 0$.