19. Svėrimai. C dalis

Įvadas

Mokytojui

Trečioji svėrimo uždavinių dalis, rekomenduojama 7–8 klasių mokiniams, nuosekliai pratęsia antrosios (B) dalies temas. Uždaviniai čia sudėtingesni. Jei jie pasirodo per sunkūs, jų sprendimą verta atidėti kuriam laikui: jei nebuvo spręsta B dalis, reikėtų imtis būtent jos. Spręsdami C dalies uždavinius mokiniai ieško algoritmų, padedančių išspręsti matematines problemas, mokosi jas vaizduoti grafiškai kaip galimybių medžius arba lenteles.

Kaip ir kitiems svėrimo uždaviniams, būtinas įgūdis atskirti ir nuosekliai perrinkti galimus variantus. Tačiau variantai, pvz., uždaviniuose apie tikras ir padirbtas monetas, turėtų būti perrenkami taip, kaip jie atrodo logiškai mąstančiam **išorės stebėtojui**. Mokinys paprastai samprotauja: „Jei aš padėjau ant lėkštelių 1 tikrą ir 1 padirbtą monetą, tai viena lėkštelė nusvėrė.“ Išorės stebėtojo akimis yra taip: „Jei ant lėkštelių padėjau po 1 monetą ir viena pusė nusvėrė, vadinasi, joje yra sunkesnė, taigi tikra moneta.“

Nors buvo stengtasi kiekvienam uždaviniui pateikti **visus įmanomus** sprendimus (arba bent užsiminti apie juos), lieka galimybė, jog mokiniai ras savo originalų sprendimo būdą. Žinoma, būkite atidūs tikrindami tokį naują būdą – jame turi būti išnagrinėtos **visos** galimos **visų svėrimų** baigtys. Jei kažkuri iš baigčių praleista, sprendimo negalime laikyti teisingu, nebent tos baigties praleidimas *nesiaurina bendrumo*. (Užbaigus šį modulį, frazė *nesiaurina bendrumo* turėtų tapti įprasta Jūsų mokinių samprotavimuose.)

Pratinkite mokinius atpažinti **analogiškus atvejus** – jų nagrinėjimą galima praleisti. Juk jei du atvejai yra *simetriški*, tereikia išnagrinėti tik vieną iš jų. Pvz., iš esmės yra visai tas pats, ar pirmajame svėrime $A > B$, ar $A < B$ – juk būtent sunkesniąją galima pavadinti (pervadinti) A, o lengvesniąją – B.

Modulio pradžioje pateikti uždaviniai yra kelių skirtingų kontekstų, bet gana panašaus sunkumo. O „Tikrų ir padirbtų monetų“ skyrelio uždaviniai, pateikti užduočių lapuose, eina sunkėjimo tvarka. Naują užduočių lapą mokiniui tikslinga duoti tik tada, kai visiškai išspręstas ankstesnis. Pirmoji modulio dalis gali būti ir spręsta, ir nespręsta – tai nėra svarbu.

Mokiniui

„Tikrų ir padirbtų monetų“ dalyje dažną uždavinį verta pradėti perrenkant visus įmanomus svėrimus „1 moneta su viena“ bei „2 monetos su dviem“. Jei reikia daugiau nei 1 svėrimo, verta pamąstyti, ar daugiau sužinosite sverdami dar visai nesvertas monetas, ar naudodami vieną iš jau svertų, o kitą – iš dar nesvertų.

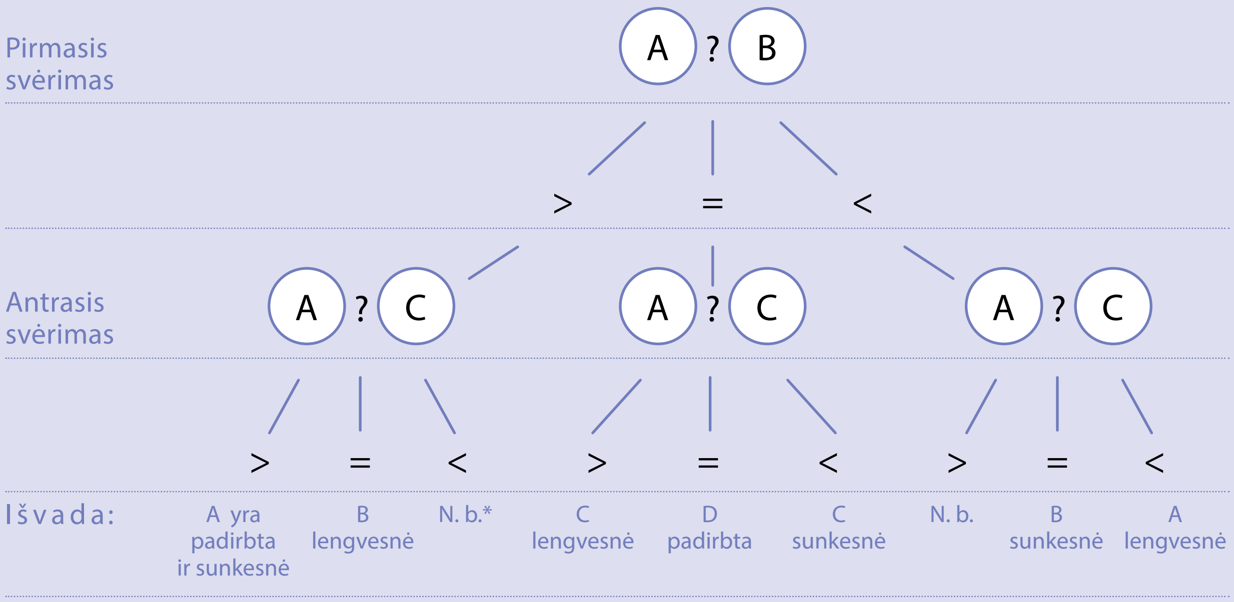
Uždavinių sprendimus patogu vaizduoti kaip galimybių medžius arba lenteles – taip sutaupoma daug laiko, o sprendimas tampa vaizdesnis. Štai kaip galėtų būti pavaizduotas tokio uždavinio sprendimas:

„Tarp 4 monetų viena yra padirbta. Nėra žinoma, ji sunkesnė ar lengvesnė. Kaip sveriant du kartus svirtinėmis svarstyklėmis be svarelių nustatyti, kuri iš jų padirbta? (Nebūtina nustatyti, sunkesnė ji ar lengvesnė.).“

19. Svėrimai. C dalis

Kaip spręsti?

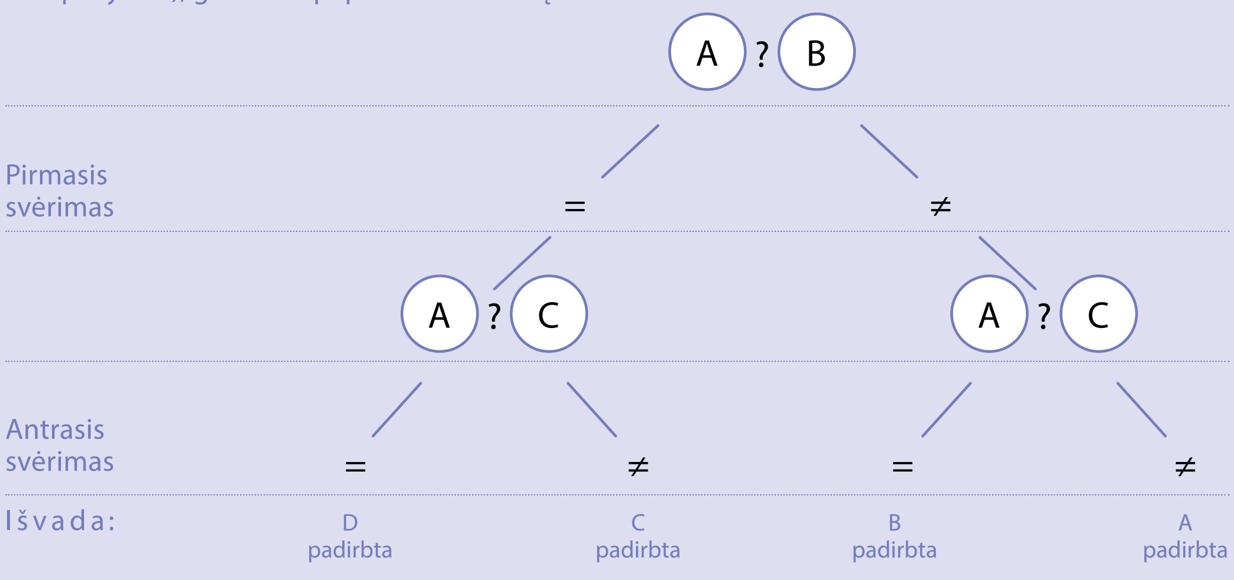
Sprendimą galima pavaizduoti schemiškai.
Pažymime monetas raidėmis A, B, C, D.



* N. b. – negali būti.

Matome, kad šioje schemoje yra atšakų, kurių būti negali, taip pat yra tokių, kuriose paaiškėja ne tik kuri moneta yra padirbta, bet ir sunkesnė ji ar lengvesnė.

Kadangi sąlyga neprašo nustatyti, padirbtoji sunkesnė ar lengvesnė (be to, kai kuriais atvejais tai ir nepavyksta), galime supaprastinti schemą.



Atkreipkime dėmesį, kad antrasis svėrimas atliekamas nepriklausomai nuo pirmo svėrimo baigties. Tuomet visą schemą (A ? B ir A ? C) galime pavaizduoti lentele.

A ? B	A ? C	Išvada
=	=	D padirbta
=	≠	C padirbta
≠	=	B padirbta
≠	≠	A padirbta

19. Svėrimai. C dalis

Uždaviniai

1. Senoviniam antpilui nuo kosulio reikia 80 g džiovintų šalavijų, 81 g medetkų ir 82 g čiobrelių. Žolininkė svarstyklėmis pasvėrė visas šias žoleles, naudodamasi trimis svareliais. Be to, svarelius visada dėjo ant kairiosios, o žoleles – ant dešiniosios svarstyklių pusės. Kiek gali būti skirtingų svarelių komplektų, kad kiekvienas jos svarelis svertų mažiau nei 70 g?

P. Perrinkite variantus. Keli svareliai galėjo būti naudojami kiekvienam svėrimui?

S. **Atsakymas.** Svarelių masės yra 39,5 g, 40,5 g ir 41,5 g. Įrodysime, kad toks komplektas vienintelis. Pavadinkime svarelius raidėmis A, B ir C – be to, jų svoriai eina nemažėjimo tvarka ($A \leq B \leq C$).

Patikrinkime, ar kažkuriam svėrimui galėjo būti naudojamas tik 1 svarelis. Tuomet jo masė viršytų 70 g. Netinka.

Patikrinkime, ar kažkuriam svėrimui galėjo būti naudojami visi 3 svareliai. Jei galėjo, tai tik paskutiniam. Tuomet $A + B + C = 82$, $C + B = 81$, o $C + A = 80$. Gautume, kad $A = 1$, $B = 2$, $C = 79$. Netinka.

Vadinasi, lieka atvejis, kai kiekvienam svėrimui buvo naudojama svarelių pora.
$B + C = 82$, $A + C = 81$ ir $A + B = 80$. Sudėję šias lygybes ir padaliję iš 2, gauname $A + B + C = 121{,}5$. Tuomet nustatome, kad $A = 39{,}5$ g, $B = 40{,}5$ g ir $C = 41{,}5$ g.

2. Prekeivis turi 13 arbūzų ir svarstykles, kuriomis galima sužinoti bendrą bet kurių 2 arbūzų masę. Patarkite prekeiviui, kaip sveriant 8 kartus sužinoti bendrą visų arbūzų masę.

P. Žinodami trijų porų svorius, jau mokate rasti viso trejeto svorį bei kiekvieno svorį atskirai.

S. Prekeivis pasveria pirmą su antru, antrą su trečiu ir pirmą su trečiu. Sudėjęs šias 3 sumas ir padalijęs iš 2, sužino pirmų trijų arbūzų bendrą masę. Atlikęs dar 5 svėrimus sužino likusių 10 arbūzų masę.

3. Turime svirtines svarstykles ir 4 svarelius, kurių bendra masė yra 40 kg. Kokie tų svarelių svoriai, jei jais galima pasverti bet kokį sveiką kilogramų skaičių nuo 1 iki 40? (Svarsčius galima dėti ant abiejų lėkštelių.)

P. Stenkitės, kad kiekviena svarelių išdėliojimo kombinacija duotų vis kitą sveriamo daikto svorį.

S. Ankstesniame modulyje buvo uždavinys apie tris svarsčius – 1, 3 ir 9 kg – ir 13-a skirtingų masių. Pridėjus dar vieną – 27 kg – svarelį, galime pasverti tiek $(27 - N)$, tiek $(27 + N)$ svorį (čia N – bet kuris natūralusis skaičius nuo 1 iki 13 imtinai.)
Atsakymas. Svarelių masės yra 1, 3, 9 ir 27 kg.

19. Svėrimai. C dalis

4. Turime svirtines svarstykles ir norime pasverti bet kokį sveiką kilogramų skaičių nuo 1 iki 121 (svarsčius galima dėti ant abiejų lėkštelių.) Kiek mažiausiai svarsčių ir kokių masių turime turėti?

P. Kuo šis uždavinys skiriasi nuo ankstesnio?

S. Pagal ankstesnį uždavinį (su komplektu 1, 3, 9 kg ir 27 kg) galima pasverti bet kokį svorį iki 40 kg. Pridėję 81 kg svarelį, galėsime pasverti tiek (81 – *N*), tiek (81 + *N*) svorį (čia *N* – bet kuris natūralusis skaičius nuo 1 iki 40 imtinai.)
Atsakymas. Pakanka 5 svarsčių, kurių masės yra 1, 3, 9, 27 ir 81 kg.

5. Reikia išdėlioti keturis skirtingo svorio arbūzus sunkėjimo tvarka. Nurodykite, kaip tai padaryti naudojant svirtines svarstykles be svarelių, kad pakaktų ne daugiau penkių svėrimų.

P. Čia gali padėti žinios apie sporto varžybų organizavimą.

S. Pavadinkime arbūzus vardais A, B, C, D. Panašiai kaip krepšinyje, surengiame du pusfinalius: A ? B ir C ? D. Nesiaurindami bendrumo, galime laikyti, kad A > B, o C > D. Tuomet rengiame finalą (A ? C) ir mažąjį finalą (B ? D). Finalo laimėtojas yra sunkiausias, o mažojo finalo pralaimėtojas – lengviausias. Beliko išsiaiškinti, kuris sunkesnis – finalo pralaimėtojas ar mažojo finalo laimėtojas. Tam ir panaudojamas penktas svėrimas.

Galimi ir kiti sprendimo būdai.

6. Turime 64 monetas, visos jos yra skirtingo svorio. Kaip ne daugiau kaip sveriant 94 kartus svirtinėmis svarstyklėmis be svarelių nustatyti pačią lengviausią ir pačią sunkiausią iš jų?

P. O kaip organizuojamos 64 dalyvių varžybos pagal atkrentamąją (olimpinę) sistemą?

S. „Suporuojame“ monetas ir atlikę 32 svėrimus nustatome, kuri toje poroje sunkesnė ar lengvesnė. Tada 32 sunkiąsias vėl poruojame, kad galėtume pasverti, atrenkame „laimėtojus“, juos vėl poruojame ir t. t., kol atrenkame pačią sunkiausią, tam panaudodami 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 31 svėrimą. Lygiai taip pat iš 32 monetų, „pralaimėjusių“ svėrimą pirmame ture, atlikę 31 svėrimą galime rasti pačią lengviausią. Iš viso reikia 32 + 31 + 31 = **94 svėrimų**.

7. Turime 32 skirtingo svorio akmenis. Įrodykite, kad užtenka atlikti 35 svėrimus svirtinėmis svarstyklėmis be svarelių, kad būtų išsiaiškinta, kuris iš akmenų yra sunkiausias, o kuris antras pagal sunkumą.

P. Vėl galima pasinaudoti būdu, panašiu į varžybų organizavimą pagal atkrentamąją (olimpinę) sistemą.

S. Akmenis sunumeruojame nuo 1 iki 32. Tuomet suskirstome juos į 16 porų ir pasveriame tarpusavyje bei užrašome, kas ką nusvėrė. „Pralaimėtojus“ paliekame savo vietose, o „laimėtojus“ suskirstome į 8 poras ir pasveriame tarpusavyje bei užrašome, kas ką nusvėrė. Analogiškai veikdami, pasvėrę 4 + 2 + 1, randame sunkiausią akmenį. Antrasis pagal sunkumą akmuo yra tik tarp tų, kurie „pralaimėjo“ svėrimą sunkiausiajam, o tokių buvo 5 (kiekvienam ture po 1).

Iš 5 akmenų atlikę 4 svėrimus rasime sunkiausiąjį, todėl iš viso reikės atlikti 16 + 8 + 4 + 2 + 1 + 4 = 35 svėrimus. Įrodyta.

8. Apie 8 išoriškai vienodus svarelius yra žinoma, kad jie sveria 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ir 8 g. Kas turėtų būti padėta ant svirtinių svarstyklių, kad matydami šio svėrimo baigtį (pusiausvyra ar kurios nors pusės pranašumas) galėtumėte **vienareikšmiškai** nustatyti bent vieno iš svarelių masę? (Svėrime negali būti naudojami jokie papildomi daiktai ar svareliai.)

P. Štai koks galėtų būti **netinkamas** pavyzdys: „Sudedu tris svarelius ant kairės pusės ir vieną – ant dešinės. Svarstyklės pusiausviros, vadinasi, dešinėje pusėje 6, nes 1 + 2 + 3 = 6.“ Paneigti pakanka kitos šio pavyzdžio interpretacijos: 1 + 2 + 4 = 7.

S. 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 7 + 8 yra vienintelis atvejis, kai penki svareliai sveria tiek pat, kiek kiti du. Todėl likusio masę (**6 g**) galima vienareikšmiškai nustatyti.

9. Turime devynis maišus, ant kiekvieno užrašyta jo masė: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ir 9 kg. Aštuonių maišų masė nurodyta teisingai, o vieno – ne: iš tiesų jis yra 1 kg sunkesnis.

Ar įmanoma atlikus du svėrimus svirtinėmis svarstyklėmis be svarelių nustatyti, kuris iš maišų sveria daugiau, nei ant jo užrašyta?

P. Naudingi tik tie svėrimai, kurie turėtų baigtis pusiausvyra.

S. Suskirstome trejetais 1 + 5 + 9, 2 + 6 + 7, 3 + 4 + 8 (visos trys sumos lygios 15 kg). Panašiai, kaip su 9 monetomis, lyginame bet kurių dviejų trejetų svorį ir atlikę 1 svėrimą nustatome, kuriame trejete yra sunkesnis maišas. Tuomet turime 6 maišus, kurių svoris atitinka užrašus, todėl sveriame taip:

a) Jei sunkesnis maišas yra trejete 1 + 5 + 9, tai 1 + 4 lyginame su 5 (atkreipkite dėmesį, kad 4 kg maišas yra „teisingas“). Jei lygu, sunkesnis yra 9 kg maišas, jei nusveria kairioji pusė, tai 1 kg maišas, jei dešinioji – 5 kg maišas.

b) Jei sunkesnis maišas yra trejete 2 + 6 + 7, tai 2 + 5 lyginame su 7 (čia 5 kg maišas yra „teisingas“). Jei lygu, sunkesnis yra 6 kg maišas, jei nusveria kairioji pusė, tai 2 kg maišas, jei dešinioji – 7 kg maišas.

c) Jei sunkesnis maišas yra trejete 3 + 4 + 8, tai 3 + 5 lyginame su 8 (čia 5 kg maišas yra „teisingas“). Jei lygu, sunkesnis yra 4 kg maišas, jei nusveria kairioji pusė, tai 3 kg maišas, jei dešinioji – 8 kg maišas.

19. Svėrimai. C dalis

10. Turime 555 svarelius, kurių masės yra 1 g, 2 g, 3 g, 4 g, ... , 554 g, 555 g. Kaip juos sugrupuoti į tris vienodos masės krūveles, kad kiekvienoje būtų po lygiai svarelių?

P. O jei kelis iš eilės einančius svarelius sugrupuotume į tris vienodos masės krūveles, kad kiekvienoje būtų po lygiai svarelių?

S. Pradėkime nuo to, kad jei turime 6 iš eilės einančias mases, jas galima suskirstyti į tris vienodai sveriančias poras: lengviausią su sunkiausia, antrą pagal lengvumą su antra pagal sunkumą ir dvi likusias vidurines. (Pvz., 1 + 6 = 2 + 5 = 3 + 4.) Tokiu būdu galima visus svarelius nuo 10 g iki 555 g iš pradžių suskirstyti šešetais (nuo 10 iki 15, nuo 16 iki 21 ir t. t.), paskui kiekvieną šešetą – į 3 vienodos masės poras. Tada reikia paimti po 1 porą iš kiekvieno šešeto į vieną iš 3 grupių – taip tose grupėse bus ne tik po tiek pat svarelių, bet ir visų grupių masė bus tokia pati. Belieka svarelius nuo 1 iki 9 suskirstyti į tris vienodas grupes. Tą jau esate darę ankstesniame uždavinyje.

11. Nuskilo ir pasimetė vienos svarstyklių lėkštelės gabaliukas, tad svarstyklės tapo netikslios. Kaip turint maišą cukraus ir 1 kg svarmenį pasverti lygiai 1 kg cukraus?

P. Vieno veiksmo nepakaks.

S. **Pirmas būdas.** Ant kairės pusės padėjus 1 kg svarmenį pilti cukrų į dešinę lėkštelę, kol bus pusiausvyra. Tuomet nuimti svarmenį ir pilti cukrų į kairiąją lėkštelę tol, kol vėl bus pusiausvyra. Kairiojoje pusėje ir bus lygiai 1 kg cukraus.

Antras būdas. Pilame cukrų ant nuskilusios lėkštelės tol, kol svarstyklės susilygina. Tuomet ant tos pačios lėkštelės padedame 1 kg svarmenį, o ant kitos pilame cukrų, kol susilygins.

12. Vilandas į stovyklą atsivežė žibintuvėlį ir penkis maitinimo elementus. Visi penki atrodo vienodai, bet trys iš jų nenaudoti, o du – išsikrovę. Vaikinas gali į žibintuvėlį įdėti du elementus ir, jei jie abu nauji, žibintuvėlis degs. Kaip jam atlikus tris tokius bandymus nustatyti bent du gerus elementus?

P. Apie elementus sužinote ne tik tada, kai žibintuvėlis dega, bei ir kai jis nedega.

S. Pažymėkime elementus A, B, C, D ir E. Tikrinam poras AB, AC, BC: jei bent vieną kartą užsidegs, ten ir yra du geri. Jei nėkart neužsidegs, ten 2 blogi ir 1 geras. Todėl D ir E yra geri.

Galimi ir kiti sprendimo būdai.

19. Svėrimai. C dalis

13. Turime šešis svarelius, ant kurių užrašytas jų svoris: 1, 2, 3, 4, 5 ir 6 gramai. Kilo įtarimas, kad per klaidą du užrašai ant svarelių galėjo būti sukeisti vietomis. Kokie du svėrimai svirtinėmis svarstyklėmis leistų įsitikinti, kad tokia klaida neįvyko?

P. Skirtingai nuo kitų uždavinių, svarbu tik nustatyti, ar sukeitimo **nebuvo**.

S. Sveriame 1 + 4 ? 2 + 3. Jei nelygu, vadinasi, buvo klaida. Jei lygu, tada arba buvo sukeisti užrašai 1 ⟷ 4, arba 2 ⟷ 3, arba 5 ⟷ 6. Sveriame 2 + 4 ? 6. Jei lygu, klaida nebuvo padaryta.

14. Tarp vienuolikos vienodai atrodančių rutulių 2 yra labai radioaktyvūs. Radiacijos matuoklis, priartintas prie bet kurio rutulių rinkinio, kuriame yra bent 1 radioaktyvus rutulys, rodo maksimalią radiacijos vertę. Todėl neįmanoma nustatyti, kiek radioaktyvių rutulių tame rinkinyje yra. Kelių patikrinimų šiuo radiacijos matuokliu pakanka, kad būtų nustatyti abu radioaktyvūs rutuliai? (**Būtinai nurodykite**, kuriuos rutulius kokia tvarka pasirenkate tikrinti ir ką iš to nustatote.)

P. Pabandykite išsiversti su septyniais patikrinimais.

S. Sunumeruokime rutulius nuo 1 iki 11.

Pirmas būdas. Matuojame tris trejetus: (1, 2, 3)?, (4, 5, 6)? ir (7, 8, 9)?. (Klaustukas rodo, jog tikriname, ar šis komplektas radioaktyvus.)

a) Jeigu nėra nė vieno radioaktyvaus komplekto, blogieji yra 10 ir 11.

b) Jei du komplektai radioaktyvūs (laikykime, kad 1, 2, 3 ir 4, 5, 6), tai kiekviename yra lygiai po 1 blogą. Matuojame atskirai 1 ir 2 – jei nė vienas neradioaktyvus, tai 3 yra blogas. Analogiškai matuojame atskirai 4 ir 5 – jei nė vienas neradioaktyvus, tai 6 yra blogas.

c) Jei vienas komplektas radioaktyvus (laikykime, kad 1, 2, 3), tai jame yra 1 arba 2 blogi. Pamatuojame visus tris atskirai – paaiškėja, kiek jų yra. Jei abu radome, užduotį atlikome. Jei tik vieną, vadinasi, dar vienas yra tarp 10 ir 11. Matuojame 10. Jei jis geras, tai 11 blogas.

Antras būdas. Matuojame poromis pirmus 10 rutulių: (1 ir 2)?, (3 ir 4)?, (5 ir 6)?, (7 ir 8)? ir (9 ir 10)?. Jei dvi poros radioaktyvios, kiekvienoje yra po 1 rutulį. Pamatavę po 1 iš abiejų porų, jau žinome tiksliai, kuris yra koks kiekvienoje iš porų. Jei viena pora radioaktyvi, matuojame abu jos rutulius atskirai. Jei tik vienas pasirodo esantis radioaktyvus, vadinasi, jis ir 11-as yra blogieji. (O jei abu – tai būtent jie ir yra ieškomieji.)

19. Svėrimai. C dalis

15. Keturios išoriškai vienodos monetos sveria 1, 2, 3 ir 4 g. Ar galima atlikus 4 svėrimus svirtinėmis svarstyklėmis be svarelių sužinoti, kiek kuri sveria?

P. Pasinaudokite tuo, kad 1 + 4 = 2 + 3.

S. Pavadinkime monetas vardais A, B, C, D. Atliekame 3 svėrimus: A + B ? C + D, A + C ? B + D, A + D ? B + C. Kažkuriame iš svėrimų būtinai susidarė 1 + 4 = 2 + 3, o kitur pusiausvyros nebuvo.

Taigi galimi 3 atvejai (laikykime, kad būtent atlikus pirmąjį svėrimą buvo lygu; tai nesiaurina bendrumo): a) = > >, b) = < < ir c) = > < . Išnagrinėkime kiekvieną iš jų.

a) Aišku, kad A = 4, o B = 1. Atlikę ketvirtą svėrimą C ? D nustatome 2 ir 3 g.
b) Aišku, kad A = 1, o B = 4. Atlikę ketvirtą svėrimą C ? D nustatome 2 ir 3 g.
c) Aišku, kad C = 4, o D = 1. Atlikę ketvirtą svėrimą A ? B nustatome 2 ir 3 g.

Galimi ir kiti sprendimo būdai.

19. Svėrimai. C dalis

Tikros ir padirbtos monetos

1. a) Kaip, turint 27 monetas, iš kurių viena padirbta ir sveria mažiau nei tikrosios, atlikus tris svėrimus svirtinėmis svarstyklėmis be svarelių nustatyti padirbtąją?

b) Kaip, turint 81 monetą, iš kurių viena padirbta ir sveria mažiau nei tikrosios, atlikus keturis svėrimus svirtinėmis svarstyklėmis be svarelių nustatyti padirbtąją?

P. Jei pagal pasiūlytus svėrimus kai kuriais atvejais padirbta moneta paaiškėja, o kitais atvejais – ne, vadinasi, reikia ieškoti kito sprendimo. Beje, šis uždavinys panašus į uždavinį su 9 monetomis ir 2 svėrimais.

S. a) ir b) sprendžiame iš esmės taip pat: daliname monetas į tris vienodas grupes ir pasveriame tarpusavyje dvi iš jų. Taip nustatome, kuriame trečdalyje yra padirbtoji. Pakartoję šį veiksmą (a) – 3 kartus, b) – 4 kartus) randame padirbtą monetą.

2. Yra du maišeliai vienodai atrodančių monetų: viename tikros, kitame – padirbtos, lengvesnės už tikrąsias. Be to, visos tikros, kaip ir visos padirbtos, tarpusavyje sveria vienodai. Iš tų maišelių paimtos keturios monetos ir išdėliotos eilute. Tarp jų būtinai yra bent viena padirbta ir bent viena tikra. Be to, bet kuri tikra moneta guli kairiau už bet kurią padirbtą monetą. Kaip atlikus vieną svėrimą svirtinėmis svarstyklėmis be svarelių nustatyti kiekvienos iš tų 4 monetų tipą?

P. Yra trys galimybės, kaip išsidėsčiusios dvi vidurinės monetos, ir trys galimos svėrimo baigtys: $>$, $=$ ir $<$. Belieka rasti tinkamą svėrimą.

S. Pavadinkime monetas vardais (iš kairės į dešinę) A, B, C, D. Akivaizdu, kad A tikra, o D – padirbta. Sveriame $A + D$ su $B + C$. Jei $=$, tai tik A ir B yra tikros. Jei $>$, tai tik A tikra. Jei $<$, tai A, B ir C yra tikros.

3. Septynios vienodai atrodančios monetos išdėliotos ratu. Kažkurios keturios iš eilės einančios yra padirbtos (jos tarpusavyje sveria vienodai, bet kiekviena iš jų yra lengvesnė už tikrą monetą; tikros monetos tarpusavyje sveria vienodai). Nurodykite, kaip atlikus vieną svėrimą svirtinėmis svarstyklėmis be svarelių nustatyti dvi padirbtas monetas.

P. Jei pavyksta nustatyti daugiau padirbtų monetų, tai nėra blogai.

S. Pavadinkime monetas vardais (pagal laikrodžio rodyklę) A, B, C, D, E, F, G. Suprantama, kažkurios trys iš eilės einančios yra tikros.

Pirmas būdas. Pasverkime A su E. Jei svarstyklės pusiausvyros, vadinasi, A, E, F, G yra padirbtos. Jei $A > E$, tai ne daugiau kaip 3 iš eilės einančios, įskaitant A, yra tikros, todėl D ir E – padirbtos. Analogiškai, jei $E > A$, tai ne daugiau kaip 3 iš eilės einančios, įskaitant E, yra tikros, todėl A ir B – padirbtos.

19. Svėrimai. C dalis

Antras būdas. Pasverkime A + B su C + D. Jei svarstyklės pusiausvyros, vadinasi, A, B, C, D yra padirbtos. Jei A + B > C + D, tai ne daugiau kaip 3 iš eilės einančios, įskaitant A, yra tikros, todėl D ir E – padirbtos. Analogiškai, jei A + B < C + D, tai ne daugiau kaip 3 iš eilės einančios, įskaitant D, yra tikros, todėl A ir G – padirbtos.

Trečias būdas. Pasverkime A + B su D + E. Jei svarstyklės yra pusiausvyros, vadinasi, abiejose pusėse yra po 1 tikrą monetą. Taigi B, C, D yra tikros, o A, E, F, G – padirbtos. Jei A + B ≠ D + E, tai lengvesnėje poroje abi padirbtos.

Ketvirtas būdas. Pasverkime A + B + C su D + E + F. Jei svarstyklės pusiausvyros, vadinasi, abiejose pusėse yra po 1 tikrą monetą. Taigi A, F, G yra tikros, o B, C, D, E – padirbtos. Jei A + B + C > D + E + F, tai E ir F yra padirbtos. Analogiškai, jei A + B + C < D + E + F, tai A ir B yra padirbtos.

4. Turime 13 vienodai atrodančių monetų, tarp kurių viena padirbta. Jos svoris skiriasi. Kaip atlikus du svėrimus svirtinėmis svarstyklėmis be svarelių nustatyti, ji lengvesnė ar sunkesnė (pačios monetos nustatyti nebūtina).

P. Prasminga ant abiejų lėkštelių dėti po tiek pat monetų. Ką parodys svarstyklės? Ką iš to suprantate?

S. **Pirmas būdas.** 6 monetas lyginame su kitomis 6. Jei lygu, tada visos yra tikros: bet kurią iš jų palyginę su 13-ąja, žinosime kokia ji. Jei nelygu, 6 lengvesnes monetas padalijame po 3 ir lyginame tarpusavyje. Jei lygu, tai padirbtoji buvo dešinėje pusėje ir ji yra sunkesnė. Jei nelygu, padirbtoji yra tarp šių 6 ir yra lengvesnė.

Antras būdas. Bet kurias 4 lyginame su kitomis 4. Jei lygu, tada visos yra tikros. Paėmę bet kurias 5 iš jų ir palyginę su likusiomis 5 nesvertomis, žinosime kokia yra padirbtoji. Jei nelygu, tai 4 lengvesnes monetas lyginame su 4-iomis nesvertomis (aišku, tikromis). Jei dabar lygu, tai padirbtoji sunkesnė, o jei nusvėrė tikrosios – lengvesnė.

Galimas ir trečias būdas. Pradžioje bet kurias 5-ias monetas lyginti su kitomis 5-iomis.

5. Turime 7 išoriškai vienodas monetas, tarp kurių 5 tikros, sveriančios vienodai, ir 2 padirbtos, irgi sveriančios vienodai, bet lengvesnės už tikrąsias. Kaip atlikus du svėrimus svirtinėmis svarstyklėmis be svarelių nustatyti 3 tikrąsias monetas?

S. Pavadinkime monetas vardais A, B, C, D, E, F ir G.

Pirmas būdas. Sveriame A + B ? C + D.

a) Jei =, tai arba visos keturios tikros, arba kiekvienoje poroje po 1 padirbtą. A ? B:
   jei =, tai A, B, C ir D tikros;
   jei >, tai A, E, F ir G tikros;
   jei <, tai B, E, F ir G tikros.
b) Jei > (tai nesiaurina bendrumo), tai tarp C ir D yra bent 1 padirbta. C ? D:

jei =, tai A, B, E, F ir G tikros;
jei >, tai A, B ir C tikros;
jei <, tai A, B ir D tikros.

Antras būdas. Sveriame A + B + C ? D + E + F.

a) Jei =, tai kiekviename trejete yra po 1 padirbtą, o F – tikra. Pakanka A ? B:
jei =, tai tikros yra A, B ir F;
jei >, tai tikros yra A, C ir F;
jei <, tai tikros yra B, C ir F.

b) Jei >, tai tarp D, E ir F yra bent viena padirbta. Bet tuomet visos trys – A, B ir C – yra geros.

c) Jei <, tai analogiškai b atvejui, tikros yra D, E ir F.

6. Turime 5 monetas, iš kurių trys yra tikros ir sveria vienodai, viena – padirbta, lengvesnė nei tikra, o paskutinioji – padirbta, sunkesnė nei tikrosios. Kaip atlikus tris svėrimus svirtinėmis svarstyklėmis be svarelių nustatyti abi padirbtąsias?

S. Pavadinkime monetas vardais A, B, C, D ir E. Atliekame 2 svėrimus – A ? B ir C ? D. Abi būti pusiausviros negali, taigi lieka du variantai (kiti yra simetriški, tad juos nagrinėjame analogiškai, tiesiog sukeičiame monetų pavadinimus vietomis):

1) Jei A < B ir C = D (vadinasi, C ir D yra tikros), lyginame C ? E. Jei C = E, tada A lengvesnė, o B sunkesnė. C < E rodytų, kad E sunkesnė, o A lengvesnė. C > E rodytų, kad E lengvesnė, o B sunkesnė.

2) Jei A < B ir C < D, lyginame B ? D. Lygybės būti negali, todėl bus arba A < B < D (A lengvesnė, o D sunkesnė), arba C < D < B (C lengvesnė, o B sunkesnė).

(Beje, galimas ir alternatyvus trečiasis svėrimas – juk žinome, kad kiekvienoje poroje yra po vieną padirbtą monetą, o E yra tikra. Pakanka pasverti E su bet kuria kita. Pvz., E ? A. Jei A = E, tada C lengvesnė, o B sunkesnė. A < E rodytų, kad D sunkesnė, o A lengvesnė. A > E būti negali.)

7. Turime svirtines svarstykles be svarelių ir 6 monetas, iš kurių dvi padirbtos. Visos tikros monetos tarpusavyje sveria vienodai, abi padirbtos taip pat tarpusavyje sveria vienodai.

Kaip atlikus keturis svėrimus nustatyti padirbtąsias, jei nėra aišku, jos sunkesnės ar lengvesnės už tikrąsias?

P. Bandykite dėlioti ant lėkštelių po 1 arba po 2 monetas. Ką gali rodyti svarstyklės ir kokias išvadas galima iš to padaryti?

S. **Pirmas būdas.** Bet kurią monetą pasverkime iš eilės su keturiomis kitomis (laikykime, kad ją visuomet dedame ant kairiosios lėkštelės). Pagal lygybių ir nelygybių kiekį bus aišku, kas tokios svertosios ir kas tokia nesvertoji moneta:

a) buvo dukart = ir dukart <, tuomet padirbtos tos, kurios sunkesnės;

b) dukart = ir dukart >, tuomet padirbtos lengvesnės;
c) jei buvo triskart lygu ir kartą <, tuomet padirbta sunkesnė ir nesverta;
d) triskart = ir kartą >, tuomet padirbta lengvesnė ir nesverta;
e) jei buvo vienąkart = ir triskart nelygu, tai padirbtos svėrė vienodai;
f) jei visus kartus buvo < arba visus kartus >, tai padirbta nesvertoji ir ta, kurią svėrėme su keturiomis;
g) keturių lygybių būti negali.

Antras būdas. A ? B ir C ? D.

1) Jei abu kartus buvo lygu, sverti A ? C. Jei A = C, padirbtos yra E ir F. O jei A ≠ C, tai E ir F yra tikros, todėl paskutinis svėrimas A ? E: A = E rodo, kad padirbtos C ir D, o A ≠ E rodo, kad padirbtos A ir B.
2) Jei buvo abu kartus nelygu, tai E ir F geros ir A ? E leidžia nuspręsti, padirbtos yra sunkesnės ar lengvesnės.
3) Jei tik viena pora = (pvz., C ir D), tada jos abi tikros ir E ? F bei C ? E (arba C ? A bei C ? E) leidžia išsiaiškinti padirbtas.

Galimi ir kiti sprendimo būdai. Pvz., galima pradėti nuo A + B + C ? D + E + F.

8. Turime svirtines svarstykles be svarelių ir 6 monetas, iš kurių dvi padirbtos. Visos tikrosios tarpusavyje sveria vienodai. Kaip atlikus tris svėrimus nustatyti abi padirbtąsias, jei tėra žinoma, jog jos sveria mažiau nei tikrosios?

P. Atkreipkite dėmesį, kad **nėra žinoma**, ar padirbtos sveria vienodai.

S. Pavadinkime monetas vardais A, B, C, D, E, F. Atliekame 2 svėrimus – A ? B ir C ? D.

1) Jeigu abi svarstyklės nelygios, tai abi mažiau sveriančios ir yra padirbtos.
2) Jeigu abi lygios, tai trečiu svėrimu A ? C: jei A = C, padirbtos yra E ir F; jei A < C, padirbtos yra A ir B; ir atitinkamai, jei A > C, tai – C ir D.
3) Jeigu nelygu vienoje iš jų (pvz., A > B), tai viena padirbta moneta jau aiški, o kitos dvi – C ir D – tikros. Tuomet trečiu svėrimu C ? E: jei C = E, tada padirbta F, o jei C > E, – E.

Šiuo atveju trečiasis svėrimas gali būti ir E ? F: jei čia bus nelygu, tai, kaip ir pirmu atveju, abi mažiau sveriančios ir yra padirbtos. O jei E = F, tai A ir B padirbtos, nors jų svoris skiriasi.

9. Turime svirtines svarstykles be svarelių ir 50 monetų, iš kurių viena padirbta ir sveria mažiau nei tikrosios. Kiek mažiausiai svėrimų prireiks atlikti, kad būtų nustatyta padirbta moneta?

P. Čia nei 27, nei 81 moneta, bet panašus principas, kaip anksčiau spręstame uždavinyje, turi veikti.

S. **Atsakymas.** Reikia mažiausiai keturių svėrimų:

1) 17 monetų lyginame su kitomis 17 ir nustatome, kuriame komplekte yra padirbtoji (lygybė rodo, kad tarp likusių 16 monetų).

19. Svėrimai. C dalis

2) 6 monetas lyginame su 6 ir nustatome, kuriame komplekte yra padirbtoji (lygybė rodo, kad tarp likusių 5 ar 4 monetų).
3) 2 monetas lyginame su 2 ir nustatome, kurioje poroje yra padirbtoji. (Jei buvo „įtartinos“ tik 5 monetos, lygybė rodo, kad padirbta yra likusi 1 moneta; ketvirtą kartą sverti nereikia.)
4) Tarpusavyje palyginame padirbtų monetų porą. Nustatyta.

10. 9 monetos išdėliotos ratu. Tarp jų yra 5 tikros ir 4 padirbtos, sunkesnės, monetos. Be to, padirbtos neguli greta viena kitos. Tikrosios sveria vienodai, padirbtosios tarpusavyje taip pat sveria vienodai. Kaip sveriant du kartus svirtinėmis svarstyklėmis be svarelių nustatyti, kurios monetos yra padirbtos?

P. Jei padirbtos neguli greta, vadinasi, kažkurioje vietoje greta viena kitos būtinai bus dvi tikros.

S. Pavadinkime monetas vardais A, B, C, D, E, F, G, H, I.
Sveriame ABC ? DEF.

a) Jei > (tarkime, būtent ABC > DEF, tai nesiaurina bendrumo), tai tame trejete P:G:P (padirbta:tikra:padirbta; būtent šia tvarka), o gretimos – D ir I – yra abi tikros. Tikriname ABC ? EFG: jei =, tai E ir G padirbtos, o jei >, tai padirbtos yra F ir H.
b) Jei ABC = DEF, tuomet G, H, I yra P:G:P, o A ir F – tikros. Tad veikiame analogiškai jau išnagrinėtam atvejui: GHI ? BCD ir t. t.

Galimi ir kiti sprendimo būdai.

11. Turime 101 monetą, tarp kurių 51 tikra bei 50 padirbtų, sveriančių 1g daugiau arba 1 g mažiau nei tikrosios (tikros sveria vienodai). Turime svirtines svarstykles, kurių rodyklė rodo svorio skirtumą gramais. Ar galima sveriant vieną kartą nustatyti, pasirinkta moneta tikra ar ne?

P. O kas turi būti sveriama, kad galėtumėte padaryti išvada apie pasirinktąją monetą?

S. Pasirinktą monetą atidedame į šalį, o likusias padalijame po 50 ir įdedame į skirtingas lėkšteles. Jei rodyklė rodo lyginį skirtumą, tai tarp tų 100 monetų yra lyginis skaičius padirbtų (t. y. 50), atidėtoji – tikra. Ir atvirkščiai, jei rodyklė rodo nelyginį skirtumą, tai tarp tų 100 monetų yra nelyginis skaičius padirbtų (t. y. 49), atidėtoji – padirbta.

12. a) Yra 10 maišų su monetomis: devyni – su tikromis monetomis, sveriančiomis po 10 g, ir vienas maišas su padirbtomis, sveriančiomis po 11 g. Kaip atlikus vieną svėrimą tiksliomis svarstyklėmis, kurios rodo masę gramais, nustatyti, kuriame maiše yra padirbtosios?

b) Turime 10 maišų su monetomis. Keliuose maišuose yra tikros monetos, kituose – padirbtos. Kiekviena tikra moneta sveria 10 g, padirbta – 11 g. Ar pakaktų pasverti vieną kartą tiksliomis svarstyklėmis, kad būtų galima nustatyti visus maišus su netikromis monetomis?

19. Svėrimai. C dalis

P. Jei iš kažkurio maišo nebus paimta monetų, apie tą maišą nieko ir nesužinosime, kaip ir apie kitus du, jei iš jų paimsime po tiek pat monetų.

S. a) iš pirmojo maišo paimkime 1 monetą, iš antrojo – dvi, iš 3-iojo – 3 ir t. t. Šias 55 monetas pasverkime. Jei jos visos būtų tikros, kartu svertų 550 g. Dabar gauto svorio ir 550 skirtumas rodys, kuriame maiše yra padirbtos monetos.

b) iš pirmojo maišo paimkime 2 monetas, iš antrojo – 4, iš 3-iojo – 8, iš 4-ojo – 16 ir t. t., vis dvigubindami. Šias 2046 monetas pasverkime. Jei jos visos būtų tikros, kartu svertų 20460 g. Dabar gauto svorio ir 20460 skirtumas bus skaičius, kurį galima vieninteliu būdu užrašyti kaip dvejeto laipsnių sumą. Toje sumoje panaudoti laipsniai, tiksliau jų rodikliai, ir rodys, kuriuose maišuose yra netikros monetos. Pvz., 20498 – 20460 = 38 = 32 + 4 + 2 = $2^5 + 2^2 + 2^1$, tai padirbtosios yra 1-ame, 2-ame ir 5-ame maišuose.

13. Slaptasis agentas aptiko 7 guminukų dėžutes, keturiose iš jų guminukai tikri, o kitose – ne. Tikrieji sveria po 10 g, o padirbtieji – po 9 g. Kaip paimant kuo mažiau guminukų ir atliekant vieną svėrimą tiksliomis svarstyklėmis nustatyti, kuriose dėžutėse yra tikrieji guminukai?

P. Pabandykite rasti geresnę sistemą nei ankstesniame uždavinyje su dvejeto laipsniais.

S. Iš dėžučių reikia išimti atitinkamai 0, 1, 2, 3, 6, 11, 20 guminukų ir juos visus pasverti. Jei visi būtų tikri, jie turėtų sverti 430 g. Kiek trūksta iki 430 g rodo, kuriose dėžutėse padirbtieji:

trūksta 3 g = 0 + 1 + 2 – padirbti pirmose 3 dėžutės;
trūksta 4 g = 0 + 1 + 3 – padirbti 1-oje, 2-oje ir 4-oje dėžutėse.
5 = 0 + 2 + 3
6 = 1 + 2 + 3
7 = 0 + 1 + 6
8 = 0 + 2 + 6
9 = 0 + 3 + 6
10 = 1 + 3 + 6
11 = …..

Svarbu, kad bet kuris skaičius nuo 3 iki 37 **vieninteliu** būdu užrašomas kaip trijų pasirinktų skaičių (0, 1, 2, 3, 6, 11, 20) suma – tai leidžia nustatyti, kuriose trijose dėžutėse yra padirbti guminukai.

Kuriame Lietuvos ateitį
2014–2020 metų Europos Sąjungos fondų investicijų veiksmų programa