21. Ilgis, plotas, perimetras

Įvadas

Mokytojui

Šie uždaviniai padės mokiniams geriau suvokti ilgį, perimetrą, plotą ir jų tarpusavio sąryšį. Sprendžiant uždavinius mokiniams reikės pasitelkti kūrybinį mąstymą ir pasinaudoti jau turimomis žiniomis, įgytomis per matematikos pamokas mokantis apie perimetrą, plotą, apskritimo ilgį, skritulio plotą. Uždaviniai labiausiai tinka 7–8 klasių mokiniams.

Mokiniui

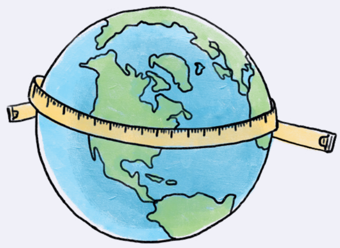
Šiame modulyje pateikti įvairaus sudėtingumo uždaviniai apie ilgį, perimetrą ir plotą. Sprendžiant uždavinius reikės pasitelkti kūrybinį mąstymą ir pasinaudoti jau turimomis žiniomis, įgytomis per matematikos pamokas mokantis apie perimetrą, plotą, apskritimo ilgį, skritulio plotą.

Uždaviniai

1. Mergaitė, berniukas ir šuo tuo pačiu metu, iš tos pačios vietos, ta pačia kryptimi pradeda kelionę. Berniuko greitis yra 5 km/val., mergaitės greitis – 6 km/val. Šuo bėgioja nuo mergaitės prie berniuko, paskui vėl prie mergaitės, vėl prie berniuko ir taip visą laiką. Šuns pastovus greitis yra 10 km/val., apsisukdamas jis nesulėtina greičio. Kiek iš viso kilometrų šuo subėgios per 1 valandą?

S. **Atsakymas. 10 km, ne jis bėga 10 km/val.**

2. Žemės perimetras ties pusiauju yra apie 40 000 kilometrų. Įsivaizduokite, kad vienas žmogus apjuosė Žemę ties pusiauju geležine juosta taip, kad ji lietėsi su žeme. Tarkime, tu atėjai naktį ir juokais prie tos geležinės juostos dar privirinai 10 metrų. Dabar, kai ši juosta tapo ilgesnė, ji jau nesiliečia su žeme. Kiek pakilo ši juosta nuo žemės, t. y., ar po ja galėtų praląsti musė, kiškis ar žmogus?



P. Naudokitės apskritimo ilgio formule $C = 2\pi R$.

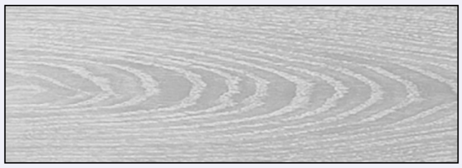
S. Žmogaus nutiestos juostos $C = 2\pi R$.
Pailgintos juostos $C + 10 = 2\pi(R + x)$, čia x – atsiradęs tarpas tarp žemės ir juostos;
Iš šių dviejų lygybių gauname, kad $2\pi x = 10$ ir **$x = 10/2\pi \approx 1,6$ m. Vadinasi, po juosta gali pralįsti net žmogus.**

21. Ilgis, plotas, perimetras

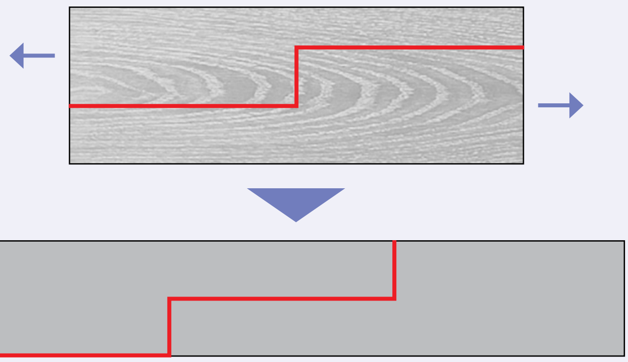
3. Kaip perpjauti lentą į dvi lygias dalis, kad tomis lentos dalimis būtų galima uždengti stačiakampę skylę?

Skylė,
kurią reikia uždengti,
yra 2×12 m.

Lenta,
kurią reikia supjaustyti,
yra 3×8 m.



S.

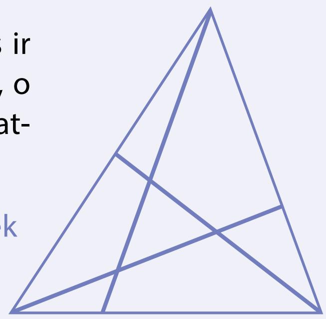


4. Trikampio ABC kraštinėje AC pažymėtas taškas E. Rask BE ilgį, jei trikampio ABC perimetras lygus 25 cm, trikampio ABE perimetras lygus 15 cm, o trikampio BCE – 17 cm.

P. Pabandykite sudėti dviejų mažesniųjų trikampių perimetrus ir iš sumos atimti didžiojo trikampio perimetrą.

S. **Atsakymas. (15 + 17 – 25) / 2 = 3,5 cm.**

5. Trikampis trimis paryškintomis linijomis padalytas į 4 trikampius ir 3 keturkampius. Tų trijų keturkampių perimetrų suma lygi 25 cm, o keturių trikampiukų perimetrų suma lygi 20 cm. Rask paryškintų atkarpų ilgių sumą, jei pradinio trikampio perimetras lygus 19 cm.

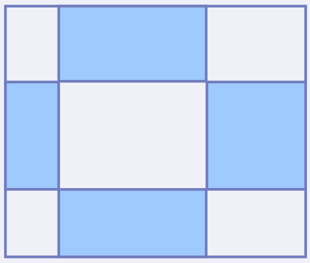


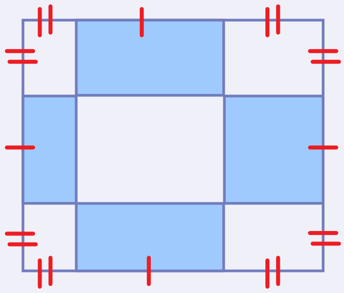
P. Sudėkite visų trikampiukų ir visų keturkampių perimetrus – po kiek kartų panaudota kiekviena pariebintos atkarpos dalelė? O po kiek kartų panaudota pradinio trikampio kraštinių kiekviena dalelė?

S. Sudėję visų trikampiukų ir visų keturkampių perimetrus, gausime, kad toje sumoje kiekviena ryškios atkarpos dalelė panaudota po 2 kartus, o pradinio trikampio kraštinių kiekviena dalelė – po 1 kartą. Todėl paryškintų atkarpų ilgių suma **(25 + 20 – 19) / 2 = 13.**

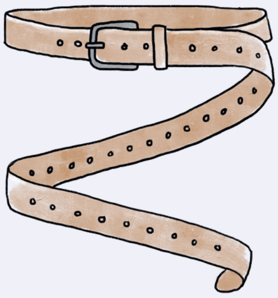
21. Ilgis, plotas, perimetras

6. Stačiakampis 5×7 cm padalytas į 9 stačiakampius, kurie nudažyti kaip šachmatų lentoje. Visų nudažytų stačiakampių perimetrų suma lygi visų baltųjų stačiakampių perimetrų sumai. Apskaičiuok vidurinio baltojo stačiakampio perimetrą.





S. Vidinės linijos priklauso ir nudažytiems, ir baltiems stačiakampiams, todėl išorinio stačiakampio „vidurinių“ linijų, pažymėtų vienu brūkšniu, suma lygi „kampinių“ linijų, pažymėtų dviem brūkšniais, sumai, lygu išorinio stačiakampio pusperimetriui. Bet „vidurinių“ linijų suma lygi viduriniojo baltojo stačiakampio perimetrui, t. y. **5 + 7 = 12.**



7. Magiškas stačiakampis diržas per pusę sutrumpėja ir tris kartus suplonėja kiekvieną kartą, kai jo šeimininkas sugalvoja norą. Po trijų norų diržo plotas liko 4 cm^2. Koks buvo pradinis diržo ilgis, jei pradinis jo plotis buvo 9 cm?

P. Pirma suskaičiuok diržo plotį po trijų norų, paskui iš turimo diržo ploto ir pločio įvertink, koks po trijų norų buvo ilgis. O tada atbuline tvarka ieškok, koks buvo pradinis ilgis.

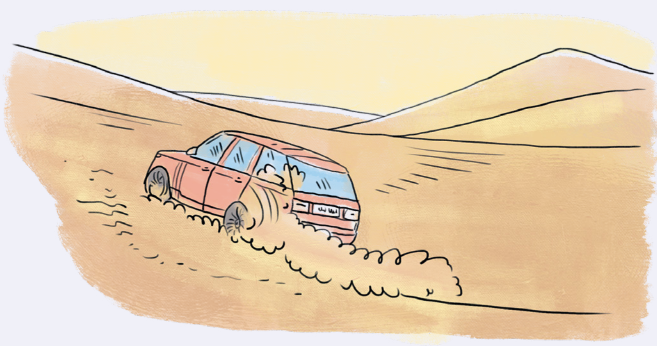
S. Pradinis diržo ilgis buvo 96 cm. Prieš sugalvojant norą diržo išmatavimai buvo 96×9, po pirmo noro jau 48×3, po antro noro 24×1 ir po trečio – 12×1/3. O **12 · 1/3 = 4 cm^2.**

8. 1 metro lazdelė netyčia perlūžo į dvi dalis. Koks yra vidutinis trumpesniosios atlūžusios dalies ilgis?

P. Pirma pagalvok, kokių ilgių galėtų būti trumpesnioji lazdelės dalis.

S. Trumpesniosios dalies ilgis gali būti intervale (0; 50) cm. Tuomet jos vidutinis ilgis yra **25 cm.**

9. Šalies princas būtinai turi būti pervežtas per dykumą, tačiau dykumoje nėra degalinių. Automobilio kuro bako talpa yra tokia, kad automobilis gali pervažiuoti tik pusę dykumos. Princui nuvežti galima panaudoti kiek norima automobilių – visų jų kuro bakų talpos vienodos. Kaip pervežti princą per dykumą?



P. Reikia naudoti kelis automobilius, kurie, sunaudoję savo degalus, paliekami dykumoje.

S. **Atsakymas. Reikės 4 automobilių.**

Pradžioje visi 4 automobiliai buvo pilni kuro. Nuvažiavus 1/6 kelio, visų automobilių kuro bakuose likę po 2/3 degalų. Vieno automobilio kurą supilame į du kitus automobilius – jie dabar pilni, trečiame 2/3 degalų. Automobilį be degalų paliekame dykumoje.

Nuvažiavus 2/6 kelio, dviejų automobilių kuro bakuose likę po 2/3 degalų, o vieno – tik 1/3. Šio automobilio kurą supilame į pirmą automobilį – jis dabar pilnas, antrame 2/3 degalų. Automobilį be degalų paliekame dykumoje.

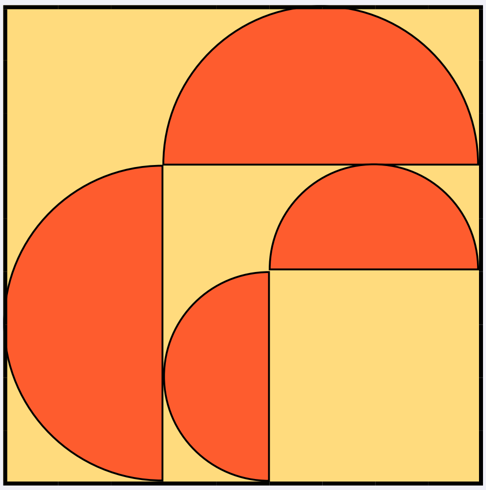
Nuvažiavus pusę kelio, vieno automobilio kuro bake likę 2/3 degalų, o kito – tik 1/3. Šio automobilio kurą supilame į pirmą automobilį – jis dabar pilnas, antrasis be degalų, jį paliekame dykumoje. Pirmasis automobilis su pilnu kuro balu dabar gali pervažiuoti likusią dykumos pusę.

10. Mažai yra žinoma apie matematiką Diofantą, gyvenusį apie 250 metus, kuris yra vadinamas algebros tėvu. Ant jo kapo buvo parašyta, kad 1/6 Diofanto gyvenimo truko jo vaikystė. Po vaikystės praėjus 1/12 gyvenimo jam išaugo pirmoji barzda. Dar po 1/7 gyvenimo jis vedė. Po 5 metų jam gimė sūnus, kuris gyveno lygiai pusę tiek, kiek Diofantas. Pats Diofantas mirė 4 metai po sūnaus mirties. Kiek metų gyveno matematikas Diofantas?

P. Diofanto gyvenimo trukmę pasižymėkite x ir susidarykite lygtį.

S. **Atsakymas 84**, nes $(1/6)x + (1/12)x + (1/7)x + 5 + (1/2)x + 4 = x$.

11. Kuris plotas didesnis – raudonas ar geltonas?



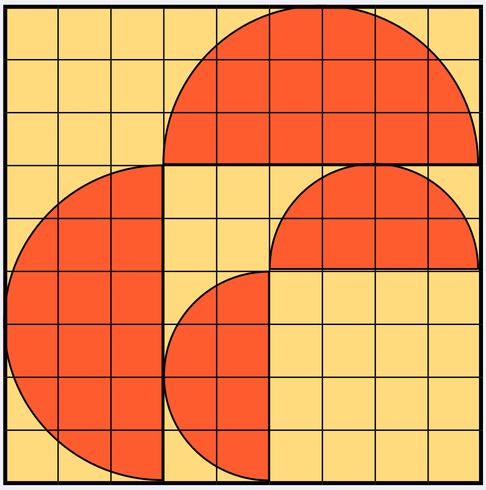
P. Padalykite piešinį ir skaičiuokite plotus pagal skritulio ploto formulę.

21. Ilgis, plotas, perimetras

S. Raudonas plotas susideda iš dviejų skritulių, vieno spindulys yra 3, o kito – 2.
Didelio skritulio plotas – $\pi \times 32 \approx 28{,}27$.
Mažesnio skritulio plotas – $\pi \times 22 \approx 12{,}57$.

Taigi

kvadrato plotas – 9 x 9 = 81;
raudonų skritulių plotas – 28,27 + 12,57 = 40,84;
geltonos dalies plotas – 81 – 40,84 = 40,16.
Tuomet raudonas plotas didesnis už geltoną.

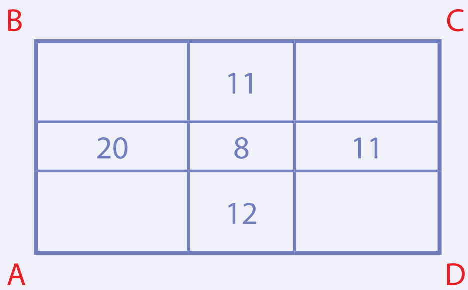


12. Stačiakampis lygiagrečiomis kraštinėmis linijomis padalytas į 9 stačiakampius. Brėžinyje į kai kuriuos stačiakampius įrašyti jų perimetrai. Nustatykite klaustuku pažymėto stačiakampiuko perimetrą.

P. Stačiakampių eilutėje visos vertikaliosios kraštinės lygios, todėl dešiniojo viršutiniojo horizontaliųjų kraštinių suma nuo kairiojo viršutiniojo stačiakampiuko horizontaliųjų kraštinių sumos skiriasi per 2.

S. Kiekvienoje stačiakampių eilutėje visos vertikaliosios kraštinės lygios, todėl dešiniojo viršutiniojo horizontaliųjų kraštinių suma nuo kairiojo viršutiniojo stačiakampiuko horizontaliųjų kraštinių sumos skiriasi per 2 (12 – 10 = 2). Bet taip pat susijusios apatiniojo dešiniojo ir apatiniojo kairiojo horizontaliosios kraštinės, todėl ieškomo stačiakampiuko perimetras yra **11 + 2 = 13.**

13. Ir vėl brėžinyje į kai kuriuos stačiakampius įrašyti jų perimetrai. Nustatyk stačiakampio ABCD perimetrą.

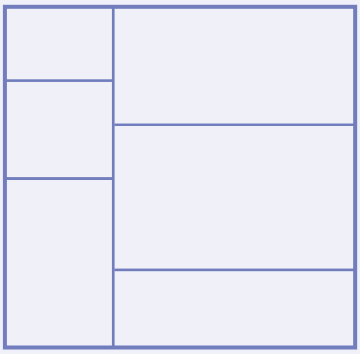


P. Pasinaudokite tuo pačiu pastebėjimu, kaip ir prieš tai buvusiame uždavinyje.

S. Centrinio stačiakampiuko perimetras $(x + y) \cdot 2$,
tuomet $AB = x + x + 1{,}5 + x + 2$,
o $BC = y + y + 6 + y + 1{,}5$
$\mathbf{P = (3x + 3y + 11) \cdot 2 = 24 + 22 = 46.}$

Kitas būdas. Kairiojo viršutinio stačiakampiuko perimetras yra 23, dešiniojo apatinio – 15. Kad gautume ABCD perimetrą, dar reikia pridėti centrinio stačiakampiuko perimetrą:
23 + 15 + 8 = 46.

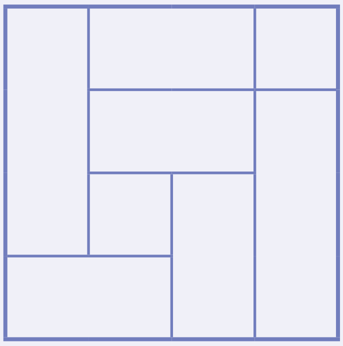
21. Ilgis, plotas, perimetras



14. Kvadratas sukarpytas į 6 stačiakampius, kurių perimetrų suma lygi 120 cm. Rask pradinio kvadrato plotą.

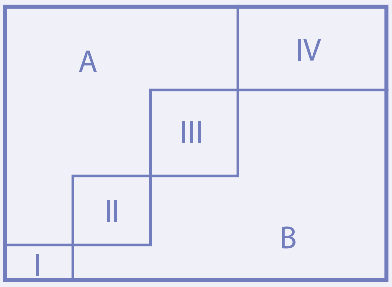
S. Kvadrato aukštis įskaičiuotas 4 kartus (1 + 2 + 1), o plotis – 6 kartus (1 + 2 + 2 + 1), tad kraštinė lygi 120 / 10 = 12. **Plotas 12 · 12 = 144 cm².**

15. Andrius, panaudojęs tris vienodus didelius stačiakampius, tris vienodus mažesnius stačiakampius ir vieną kvadratą, kurio kraštinės ilgis lygus 1 cm, sudėjo kvadratą, kurio kraštinės ilgis lygus 13 cm (žr. brėžinį). Raskite stačiakampių matmenis. (Kraštinės brėžinyje nėra proporcingos atsakymui.)



P. Pastebėkite, kad kairioji kvadrato kraštinė susideda iš didžiojo stačiakampio ilgesniosios kraštinės ir mažojo stačiakampio trumpesniosios kraštinės, o dešinė kvadrato kraštinė – iš didžiojo stačiakampio trumpesniosios ir ilgesniosios kraštinių.

S. Kairioji kvadrato kraštinė susideda iš didžiojo stačiakampio ilgesniosios kraštinės ir mažojo stačiakampio trumpesniosios kraštinės, o dešinioji kvadrato kraštinė – iš didžiojo stačiakampio trumpesniosios ir ilgesniosios kraštinių. Vadinasi, trumposios didžiojo ir mažojo stačiakampių kraštinės yra lygios. Jų ilgį pažymėkime a. Tada gauname, kad kvadrato kraštinė lygi 1 + 3a = 13. Iš čia gauname, kad kiekvieno stačiakampio trumpesniosios kraštinės ilgis lygus 4. Pastebėkime, kad mažesniojo stačiakampio ilgesnę kraštinę sudaro mažojo kvadrato kraštinė ir trumpesnioji mažesniojo stačiakampio kraštinė. Vadinasi, jos ilgis lygus 1 + 4 = 5. Didelio stačiakampio ilgesnės kraštinės ilgį gausime iš kvadrato kraštinės atėmę mažesnio stačiakampio trumpesnę kraštinę, t. y. 13 – 4 = 9. Taigi stačiakampių matmenys yra **4x5 ir 4x9.**



16. Stačiakampis, kurio perimetras lygus 2016, padalintas į keturis stačiakampius I, II, III, IV ir į figūras A ir B. Stačiakampių perimetrų santykis yra $P_I:P_{II}:P_{III}:P_{IV} = 1:3:5:7$. Kam lygi figūrų A ir B perimetrų suma?

P. Pastebėkite, kad stačiakampių perimetrų suma yra lygi didžiojo stačiakampio perimetrui.

S. Stačiakampių perimetrų suma yra lygi didžiojo stačiakampio perimetrui.
Vadinasi, $P_I + P_{II} + P_{III} + P_{IV} = 2016$. Tegu $P_I = x$. Tada $P_{II} = 3x$, $P_{III} = 5x$, $P_{IV} = 7x$.
Sudarome lygtį, iš kurios gauname, kad x + 3x + 5x + 7x = 2016, iš kurios gauname, kad x = 126. Pastebėkime, kad PA + PB = 2016 + P_{II} + P_{III}. Tada **PA + PB = 2016 + 8x = 3024.**

21. Ilgis, plotas, perimetras

17. Penkiakampio ir šešiakampio kraštinių ilgiai centimetrais yra iš eilės einantys natūralieji skaičiai. Yra žinoma, kad abiejų daugiakampių perimetrai yra lygūs. Be to, penkiakampio trumpiausios kraštinės ilgis yra lygus šešiakampio ilgiausios kraštinės ilgiui. Kam lygus šešiakampio trumpiausios kraštinės ilgis?

S. Pažymėkime penkiakampio trumpiausios kraštinės ilgį raide a.
Tuomet šešiakampio ilgiausios kraštinės ilgis taip pat lygus a. Penkiakampio perimetras lygus $a + (a + 1) + (a + 2) + (a + 3) + (a + 4) = 5a + 10$, o šešiakampio perimetras lygus $a + (a - 1) + (a - 2) + (a - 3) + (a - 4) + (a - 5) = 6a - 15$. Tuomet $5a + 10 = 6a - 15$ ir šešiakampio ilgiausia kraštinė $a = 25$ cm, o šešiakampio trumpiausia kraštinė lygi **$a - 5 = 20$ cm.**