2. Kombinatorika, I dalis

Variantų perrinkimo uždaviniai

Įvadas

Mokytojui

Kombinatorika – matematikos šaka, nagrinėjanti tam tikros baigtinės aibės elementų junginių (kombinacijų), tenkinančių tam tikrus kriterijus, sudarymo principus ir tų junginių skaičiaus radimo metodus. Kombinatorika labai dažnai taikoma praktiniams uždaviniams spręsti. Jos metodai taikomi sprendžiant tikimybių teorijos, valdymo sistemų, kompiuterijos uždavinius.

Pavyzdžiui, kombinatorikos uždaviniai yra tokie:
• Kiek yra skirtingų 52 kortų kaladės išmaišymo kombinacijų?
• Keliais būdais galima pasiūti trispalvę vėliavą iš *n* skirtingų spalvų audeklo?
• Keliais būdais knygų lentynoje galima išrikiuoti *n* knygų?
• Keliais būdais iš *n* žmonių grupės galima sudaryti *m* žmonių pogrupį?

Kombinatorinius uždavinius sprendė dar senovės graikų matematikai, tačiau šios matematikos šakos pagrindai sukurti XVII ir XVIII a. matematikų: Paskalio (1623–1662), Leibnico (1646–1716) ir Bernulio (1654–1705).

Prieš išmokstant greitai suskaičiuoti variantų kiekį, būtina pasitreniruoti išrašinėjant visus variantus.

1–7 uždaviniai (1 ir 2 mokinio lapai) rekomenduojami 3–4 klasėms, 8–35 uždaviniai (3–9 lapai) rekomenduojami 3–6 klasėms, 36–51 uždaviniai (nuo 10-o lapo) rekomenduojami 5–8 klasėms.

Mokiniui

Sprendžiant uždavinius, kuriuose prašoma išvardyti arba suskaičiuoti galimus variantus, svarbiausia atkreipti dėmesį į šiuos du dalykus:
1. Nepraleisti nė vieno varianto.
2. Nesuskaičiuoti kurio nors iš variantų keletą kartų.

Skaičiuojant galimus variantus, patartina vadovautis šiais principais, kurie padės išvengti klaidų:
1. Rašyti (arba išdėstyti jau užrašytus) variantus didėjimo arba mažėjimo tvarka.
2. Grupuoti variantus po kelis pagal tam tikrą panašumą.
3. Remtis ankstesniais (panašiais) uždaviniais, kurių atsakymas jau žinomas.

Nebūtina vadovautis visais trimis iškart – pakanka bet kurio vieno.

P a v y z d y s . Jei jau išrašyti visi triženkliai skaičiai, sudaryti iš skirtingų skaitmenų 1, 2 arba 3, užduotį suskaičiuoti visus keturženklius skaičius, sudarytus iš skirtingų skaitmenų 1, 2, 3 arba 4, galima atlikti trejopai:

a) išrašant didėjimo tvarka visus skaičius: 1234, 1243, 1324, 1342 ir t. t.;
b) grupuojant pagal paskutinį skaitmenį ir išrašant visus galimus variantus;
c) remiantis išspręstu uždaviniu teigti: „Kai užrašytas pirmas skaitmuo, lieka dar trys skaitmenys, kuriuos galėsime išdėlioti 6 būdais (tiek pat, kiek ir su skaitmenimis 1, 2, 3). Vadinasi, 6 būdai su vienetu priekyje, 6 būdai su dvejetu priekyje, 6 būdai su trejetu priekyje ir 6 būdai su ketvertu priekyje. Iš viso 24 būdai / skaičiai.“

2. Kombinatorika, I dalis

1. Pirmokas Jonukas moka parašyti tik A ir M raides. Jis užrašo dvi raides paeiliui.

a) Kiek skirtingų raidžių derinių jis gali sudaryti?
b) Kiek skirtingų raidžių derinių jis sudarys, jei abi užrašytos raidės turi būti skirtingos?

Atsakydami į abu klausimus, užrašykite visus galimus raidžių derinius.

P. Kiek skirtingų raidžių derinių galima sudaryti, jei pirmoji raidė būtų A? O jei pirmoji raidė būtų M?

S. a) 4: AA, AM, MA, MM.
b) 2: AM, MA.

2. Kiek skirtingų dviženklių skaičių galima sudaryti iš skaitmenų 1, 2 ir 3, jei abu skaičiaus skaitmenys privalo būti skirtingi? Užrašykite visus tokius skaičius.

P. Pasirinkite pirmąjį skaitmenį, o tada žiūrėkite, koks antrasis tiktų po jo.

S. 6: 12, 13, 21, 23, 31, 32.

3. Jonukas (tas, kuris mokėjo parašyti tik A ir M raides) išmoko parašyti ir raidę K. Jis užrašo dvi raides paeiliui.

a) Kiek skirtingų raidžių derinių jis gali sudaryti?
b) Kiek skirtingų raidžių derinių jis sudarys, jei abi užrašytos raidės turi būti skirtingos?

Atsakydami į abu klausimus, užrašykite visus galimus raidžių derinius.

P. Kiek skirtingų raidžių derinių galima sudaryti, jei pirmoji raidė būtų A? O jei pirmoji raidė būtų K? O jei M?

S. a) 9: AA, AK, AM, KA, KK, KM, MA, MK, MM.
b) 6: AK, AM, KA, KM, MA, MK.

4. Taigi, Jonukas moka parašyti tris raides: A, K ir M. Jis užrašo tris raides paeiliui. Kiek skirtingų raidžių derinių jis gali sudaryti, jei visos trys užrašytos raidės turi būti skirtingos? Užrašykite visus galimus raidžių derinius.

P. Pasirinkite pirmąją raidę, o tada žiūrėkite, kokia antroji tiktų po jos.

S. 6: AKM, AMK, KAM, KMA, MAK, MKA.

5. Petraičių šeima (tėtė Antanas, mama Marytė ir jų sūnus Karolis) išsinuomojo trivietę valtį. Keliais būdais jie gali susėsti valtyje? Pavaizduokite visus galimus susėdimo būdus.

P. Jei žmones žymėtumėte jų vardų pirmosiomis raidėmis, kiek tokių raidžių derinių galėtumėte sudaryti?

S. 6: AKM, AMK, KAM, KMA, MAK, MKA.

2. Kombinatorika, I dalis

6. Kiek skirtingų triženklių skaičių galima užrašyti, naudojant tik skaitmenis 1 ir 2 (skaitmenys skaičiuje gali kartotis)? Surašykite tuos skaičius didėjimo tvarka.

P. Koks būtų mažiausias skaičius? O antras pagal mažumą?

S. 8: 111, 112, 121, 122, 211, 212, 221, 222.

7. Seifo kodas yra triženklis skaičius, sudarytas iš skirtingų skaitmenų. Kiek kodų galima sudaryti naudojant tik skaitmenimis 1, 3 ir 5? Užrašykite visus galimus kodus.

P. Panašų uždavinį jau sprendėte (apie raides ir apie valtį). Gal galite tai panaudoti?

S. 6: 135, 153, 315, 351, 513, 531.

8. Kiek skirtingų triženklių skaičių galima užrašyti, naudojant tik skaitmenis 0, 1 ir 2? Be to, skaitmenys skaičiuje gali kartotis. Surašykite tuos skaičius didėjimo tvarka.

P. Koks gali būti pirmasis skaičiaus skaitmuo?

S. 18: 100, 101, 102, 110. 111, 112, 120, 121, 122, 200, 201, 202, 210, 211, 212, 220, 221, 222.

9. Stasys turi vieną 2 eurų monetą ir vieną 1 euro monetą bei 5 eurų banknotą. Akivaizdu, kad jis gali sumokėti 8 eurus (= 5 + 2 + 1). Kelių eurų sumos, mažesnės už 8 eurus, Stasys **negali** sumokėti negaudamas grąžos?

P. Užrašykite visas sumas, kurias Stasys gali užmokėti.

S. Gali užmokėti šias sumas:
1 eur, 2 eur, 3 eur = 1 + 2,
5 eur, 6 eur = 5 + 1,
7 eur = 5 + 2 ir 8 eur = 5 + 2 + 1.
Negali 4 eurų.

10. Pasirinkite šio uždavinio bet kurias 3 dalis ir atlikite jas. Pažymėtos raidėmis d, e ir f yra sunkiausios.

a) Užrašykite visus dviženklius skaičius, kurių skaitmenų suma lygi 12.
b) Užrašykite visus triženklius skaičius, kurių skaitmenų suma lygi 25.
c) Užrašykite visus triženklius skaičius, kurių skaitmenų suma lygi 4.
d) Užrašykite visus triženklius skaičius, kurių skaitmenų suma lygi 5.
e) Užrašykite visus triženklius skaičius, kurių skaitmenų suma lygi 24.
f) Užrašykite visus keturženklius skaičius, kurių skaitmenų suma lygi 3.

P. Visada pradėkite nuo mažiausio skaičiaus ir rašykite visus skaičius didėjimo tvarka – taip bus mažiau galimybių praleisti kurį nors skaičių.

2. Kombinatorika, I dalis

S. a) 39, 48, 57, 66, 75, 84, 93.
b) 799, 889, 898, 979, 988, 997.
c) 103, 112, 121, 130, 202, 211, 220, 301, 310, 400.
d) 104, 113, 122, 131, 140, 203, 212, 221, 230, 302, 311, 320, 401, 410, 500.
e) 699, 789, 798, 879, 888, 897, 969, 978, 987, 996.
f) 1002, 1011, 1020, 1101, 1110, 1200, 2001, 2010, 2100, 3000.

11. Tomas, Juozapas, Mantas ir Paulius – geriausi klasės matematikai. Jie atrankos varžybose surinko vienodą taškų sumą. Tačiau klasės komandoje turi būti lygiai 3 dalyviai. Keliais skirtingais būdais galima sudaryti klasės komandą?

P. Jei žmones žymėtumėte jų vardų pirmosiomis raidėmis, kiek tokių raidžių derinių galėtumėte sudaryti? Ar komanda skiriasi, jei vardai užrašyti skirtinga tvarka?

S. Yra **4 skirtingos komandos**: TJM, TMP, TJP, JMP.

12. Juozas gyvena gatvelėje, kurios namų numeriai yra nuo 1 iki 24. Kiek kartų namų numeriuose pasikartoja skaitmuo 2? Užrašykite visus tinkamus atvejus.

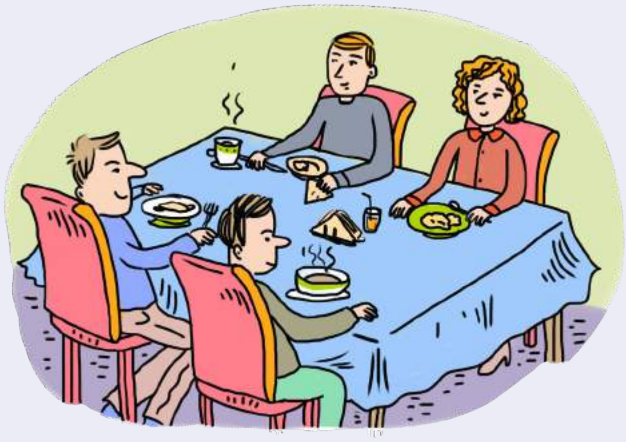
P. O keliuose skaičiuose yra skaitmuo 2?

S. Skaičiai 2, 12, 20, 21, 22, 23, 24. Juose yra **8 dvejetai.**

13. Keturi draugai – Darius, Ugnius, Rūta ir Mantas – paprastai pietauja toje pačioje kavinėje, prie to paties stalo. Jei Darius visuomet sėdi toje pačioje vietoje, kiek skirtingų būdų draugams susėsti už stalo yra iš viso?

P. Nusipieškite stalą ir pasodinkite Darių. Ką dar turite padaryti?

S. Pasodinus Darių, dar reikia susodinti 3 likusius draugus. Uždavinys turi tiek pat būdų, kiek ir trijų žmonių sodinimas į valtelę – **šešis**.



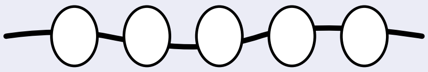
14. Jonuko klasėje kiekvienas iš vaikų gavo po 14 vienodų degtukų. Kiekvienas jų sudėliojo po stačiakampį, panaudodami visus savo degtukus ir nė vieno neperlauždami. Kiek daugiausiai skirtingų stačiakampių galima sudaryti visoje klasėje?

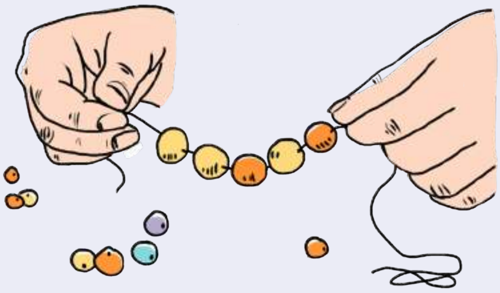
P. Stačiakampį galima lengvai apibūdinti, nurodant jo kraštinių ilgius. Pasinaudokite tuo. Žinoma, pvz. stačiakampis 10×15 nesiskiria nuo 15×10 – jis tik kitaip paguldytas.

S. Ilgio ir pločio suma turi būti $14 : 2 = 7$. Taigi tėra **trys** skirtingi stačiakampiai: 1×6, 2×5 ir 3×4.

2. Kombinatorika, I dalis

15. Ema ketina eilute ant virvutės suverti 3 geltonus ir 2 oranžinius karoliukus. Kiek skirtingų vėrinių tokiu būdu ji gali gauti? (Vėrinį galima sukioti ir vartyti.) Nupieškite ar užrašykite visus būdus.





P. Kurių karoliukų yra mažiau?
Juos ir išdėliokite pačius pirmuosius.

S. Karoliukus patartina vaizduoti raidėmis. Pvz., O ir G.
Kai abi raidės O greta: OOGGG, GOOGG. (GGOOG jau būtų identiškas pastarajam.)
Kai raides O skiria viena G: OGOGG ir GOGOG.
Kai raides O skiria dvi G: OGGOG.
Kai raides O skiria trys G: OGGGO. Štai ir visi **6 variantai**.

16. Jonuko klasėje kiekvienas iš vaikų gavo po 18 vienodų degtukų. Kiekvienas jų sudėliojo po stačiakampį, panaudodami visus savo degtukus ir nė vieno neperlauždami. Kiek daugiausiai skirtingų stačiakampių galima sudaryti visoje klasėje?

P. -

S. Ilgio ir pločio suma turi būti $18 : 2 = 9$. Taigi yra **keturi** skirtingi stačiakampiai: 1×8, 2×7, 3×6 ir 4×5.

17. Adomas turi tris korteles, ant kurių užrašyti skaičiai 1, 3 ir 5. Beata turi kitas tris korteles, ant kurių užrašyti skaičiai 2, 4 ir 6. Jei kiekvienas iš jų nežiūrėdamas išsitrauks po kortelę, kokia bus kortelių suma? Nurodykite visus galimus variantus.

P. Paeiliui išrašykite sumas, kurias gaunate, kai Adomas ištraukia 1, tada, kai Adomas ištraukia 3 ir t. t. Ar nepraleidote pasikartojančių sumų?

S. Galimos 5 skirtingos sumos: **3, 5, 7, 9, 11**.

18. Pasirenkame du skirtingus skaičius iš 1, 2, 3, 4, 5 ir juos sudedame. Kiek skirtingų sumų galime gauti? Užrašykite visas galimas sumas.

P. Pvz. jei sumą 6 gavote kaip $1 + 5$, tai $2 + 4$ nieko naujo neduos.

S. Galimos 7 skirtingos sumos: **3, 4, 5, 6, 7, 8 ir 9.**

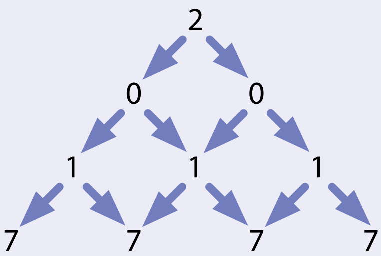
2. Kombinatorika, I dalis

19. Darželyje liko 1 raudona, 1 mėlyna, 1 geltona ir 1 balta gėlė. Bitė Maja kiekvieną gėlę aplanko tik vieną kartą. Ji pradeda nuo raudonos gėlės ir niekada nuo geltonos gėlės neskrenda tiesiai prie baltos. Keliais būdais Maja gali apskristi visas gėles?

P. Gėles pažymėkite jų pirmosiomis raidėmis ir nuosekliai užrašykite visus galimus 4 raidžių derinius.

S. **4 būdai:** RBGM, RBMG, RGMB, RMBG.

20. Keliaujant diagrama pagal rodykles, kiek būdų galima rasti, kad gautumėte skaitmenis 2, 0, 1, 7?



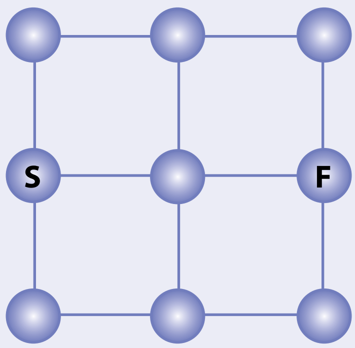
P. Kas būtų, jei savo judėjimą nuo viršaus žymėtumėte raidėmis K (kairėn) ir D (dešinėn)?

S. **8 būdai**: KKK, KKD, KDK, KDD, DKK, DKD, DDK, DDD.

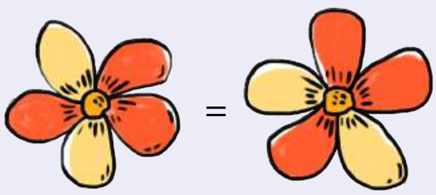
21. Kengūra iš skritulio S turi nušuoliuoti į skritulį F. Vienu šuoliu iš skritulio ji gali išilgai linijos šokti į gretimą skritulį. Į jau aplankytą skritulį šokti negalima. Kiek yra skirtingų kelių, kuriais kengūra, atlikusi **keturis** šuolius, pasieks skritulį F?

P. Pažymėkite šuoliavimo kryptis raidėmis A (aukštyn), D (dešinėn) ir Ž (žemyn). Kur kengūra gali padaryti pirmąjį šuolį?

S. **6 būdai**: DŽDA, DADŽ, ADDŽ, ADŽD, ŽDDA, ŽDAD.



22. Lina nupiešė gėlytę su 5 žiedlapiais ir norėtų ją nuspalvinti, tačiau teturi dvi spalvas – raudoną ir geltoną. Kiek skirtingų gėlyčių Lina gali nupiešti, jeigu kiekvieną žiedlapį spalvina viena spalva? (Abu paveikslėliai vaizduoja tą pačią gėlytę.)



P. Kiek gali būti geltonų žiedlapių ir kaip jie gali būti išsidėstę?

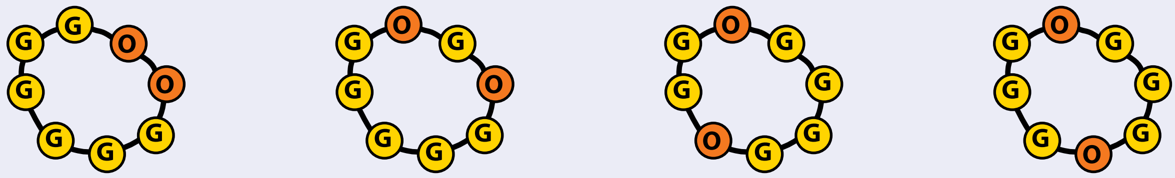
S. Geltonų žiedlapių gali būti 5, 4, 3, 2, 1 arba nė vieno (0). Su 5 geltonais žiedlapiais, kaip ir su nuliu, yra po vieną nuspalvinimo variantą. Taip pat ir su 4 geltonais žiedlapiais, kaip ir su 1, yra po vieną nuspalvinimo variantą. Jei geltoni žiedlapiai yra 2, jie gali būti arba greta, arba atskirti vienu raudonu. Taigi yra du variantai. Tas pats ir su 3 geltonais žiedlapiais, kur yra 2 raudoni. Taigi iš viso bus 2 + 2 + 2 + 2 = **8 skirtingos gėlytės**.

2. Kombinatorika, I dalis

23. Šįkart Ema ketina suverti ant virvutės ratuku 6 geltonus ir 2 oranžinius karoliukus. Kiek skirtingų vėrinių ji gaus? (Vėrinį galima sukioti ir vartyti.) Nupieškite juos visus.

P. Kurių karoliukų yra mažiau? Juos išdėliokite pačius pirmuosius.

S. Yra **4** skirtingi būdai – priklausomai nuo to, kas yra tarp abiejų oranžinių karoliukų: nieko, 1 geltonas, 2 geltoni ar 3 geltoni. Visi variantai atrodo taip:



24. Keturženklis skaičius vadinamas *įspūdingu*, jei jo skaitmenų suma ne mažesnė kaip 35. Kiek iš viso yra *įspūdingų* skaičių? Užrašykite juos visus.

P. Tai kokios skaitmenų sumos tinka?

S. Tinkamos skaitmenų sumos yra 35 ir 36. O ***įspūdingų*** skaičių **yra 5**: 8999, 9899, 9989, 9998, 9999.

25. Kiek yra skaičių, didesnių už 10, bet ne didesnių už 31, kurie užrašomi vien tik skaitmenimis 1, 2, 3? (Skaitmenys tuose skaičiuose gali kartotis.) Užrašykite juos visus.

P. Tikrai nesuklysite išrašydami juos didėjimo tvarka.

S. Iš viso yra **7 skaičiai**: 11, 12, 13, 21, 22, 23, 31.

26. Kiek yra dviženklių skaičių, kurių abu skaitmenys nelyginiai ir skirtingi? Užrašykite juos visus.

P. Koks gali būti pirmasis skaičiaus skaitmuo?

S. Yra **20 tokių skaičių**: 13, 15, 17, 19, 31, 35, 37, 39, 51, 53, 57, 59, 71, 73, 75, 79, 91, 93, 95, 97.

27. Meno vadovas nori sudaryti trio iš fleitininko, būgnininko ir gitaristo ir gali rinktis iš dviejų fleitininkų, dviejų būgnininkų ir dviejų gitaristų. Jis nusprendė paklausyti kiekvienos galimos trio sudėties grojimo. Kiek perklausų jam reikės?

P. Sutrumpinę užrašykite visus muzikantus. Pvz., F ir f yra fleitininkai, B ir b – būgnininkai, o G ir g – gitaristai.

S. Yra **8** skirtingi trio – tiek perklausų ir reikės: FBG, FBg, FbG, Fbg, fBG, fBg, fbG, fbg.

2. Kombinatorika, I dalis

28. Į tuščius lentelės 2 × 2 langelius Tomas nori įrašyti tokius du natūraliuosius skaičius, kad visų lentelėje esančių skaičių sandauga būtų lygi 90. Keliais būdais Tomas gali užpildyti lentelę?

	5
2	

P. Kokia turi būti tų dviejų trūkstamų skaičių sandauga?

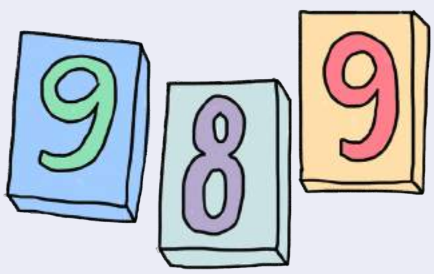
S. Yra **3 būdai** užpildyti likusius langelius: 1–9, 9–1 ir 3–3.

29. Kiek yra triženklių skaičių, kurių skaitmenų sandauga lygi 6? Užrašykite juos visus.

P. Kokius 3 skaičius sudauginę, gauname 6? Ar tėra tik vienas būdas?

S. $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ arba $1 \cdot 1 \cdot 6 = 6$. Pirmu atveju 6 skirtingi skaičiai, antru – 3. Iš viso **9 skaičiai**.

30. Paveikslėlyje pavaizduotos trys kortelės. Iš jų galima sudaryti įvairius skaičius, pavyzdžiui, 989 ar 986. Kiek triženklių skaičių galima sudaryti iš šių kortelių? Užrašykite juos visus.



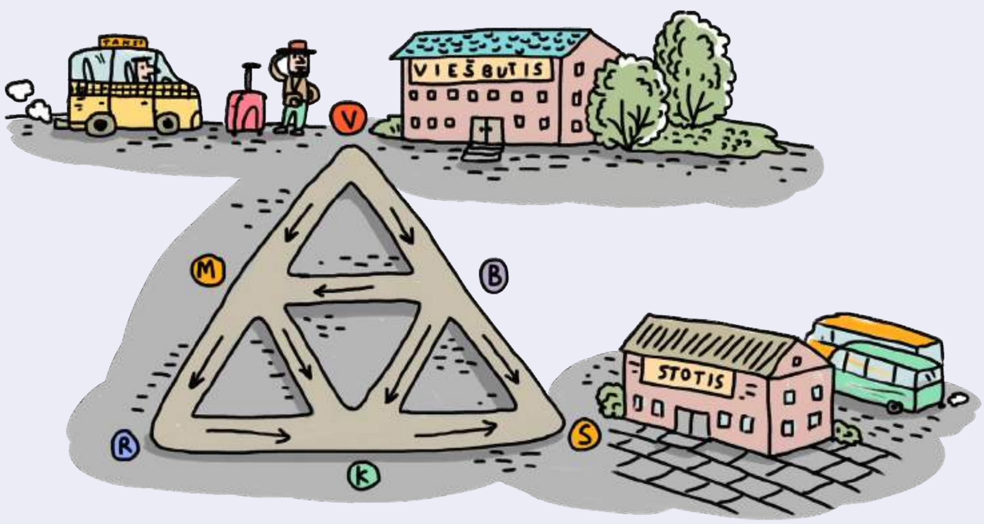
P. Ar atkreipėte dėmesį, kad, kai kurias korteles apvertus, gaunamas naujas skaitmuo?

S. Kortelė '9' gali pavirsti kortele '6'. Kai turime 6–6–8, galima sudaryti 3 skirtingus skaičius. Kai turime 6–8–9, galima sudaryti 6 skirtingus skaičius. Kai turime 9–9–8, galima sudaryti 3 skirtingus skaičius. Iš viso **12 skaičių**.

31. Turistas iš viešbučio, pažymėto raide V, turi nuvažiuoti į stotį, pažymėtą raide S. Važiuoti galima tik rodyklės kryptimi. Kiek yra skirtingų būdų nuvažiuoti iš V į S?

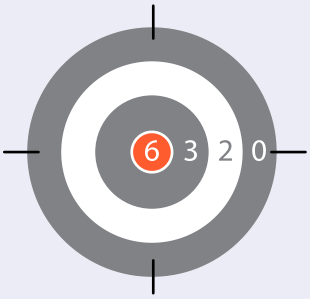
P. Kur galima nukeliauti vienu žingsniu iš V? Išnagrinėkite visus variantus.

S. Pradžioje išrašykite visus kelius iš V per B, vėliau – visus per M. Pirmiausia galima pradėti nuo trumpesnio iš kelių: VBS, VBKS, VBMKS, VBMRKS, VMKS, VMRKS. Iš viso **6 skirtingi būdai.**



2. Kombinatorika, I dalis

32.



Į taikinį metant strėlytę, galima gauti 2, 3 arba 6 taškus ir 0 taškų nepataikius. Kiek gali būti skirtingų rezultatų (taškų sumų) metant į taikinį dvi strėlytes? Užrašykite visas galimas sumas.

P. Koks galėtų būti pirmasis (mažesnis) pataikymas?

S. Paeiliui išrašykite visas sumas:
$0 = 0 + 0$, $2 = 2 + 0$, $3 = 3 + 0$, $4 = 2 + 2$,
$5 = 3 + 2$, $6 = 6 + 0$ arba
$3 + 3$, $8 = 6 + 2$, $9 = 6 + 3$, $12 = 6 + 6$.
Taigi gali būti **9 skirtingi rezultatai** (taškų sumos).

33. Ponas ir ponia Jankauskai turi du paauglius vaikus. Kai jie susėda į automobilį, du asmenys sėdi priekyje ir du gale, be to, vienas iš tėvų vairuoja. Keliais skirtingais būdais gali sėdėti jų šeima?

P. Ar panašu į uždavinį, kuriame vienas iš 4 žmonių sėdi toje pačioje vietoje prie stalo?

S. Jei tėtis vairuoja, likusieji gali susėsti 6 būdais. Jei mama vairuoja, likusieji gali susėsti taip pat 6 būdais. Taigi iš viso yra $6 + 6 =$ **12 būdų**.

34. Šeštadieninėje mokyklėlėje vyksta 4 pamokos: dvi matematikos ir po vieną gamtos mokslų bei socialinių įgūdžių. Keliais skirtingais būdais galima sudaryti tvarkaraštį, jei:

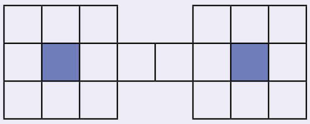
a) Abi matematikos pamokos privalo eiti iš eilės?
b) Abi matematikos pamokos nebūtinai privalo (bet gali) eiti iš eilės?

P. a) Kaip gali būti išsidėsčiusios tos dvi matematikos pamokos?
b) Prie a dalies variantų pridėkite tuos, kuriuose matematikos pamokos neina iš eilės.

S. a) Abi matematikos pamokos gali būti arba pirmos dvi, arba vidurinės, arba abi paskutinės. Kiekvienam iš šių būdų yra po du būdus išdėstyti likusias pamokas, pvz.: MMSG ir MMGS. Taigi iš viso $2 + 2 + 2 =$ **6 būdai.** (Vertinga, kai mokiniai išrašo visus būdus raidėmis.)
b) Neinančios iš eilės matematikos pamokos gali būti išsidėsčiusios taip: MxMx, MxxM bei xMxM (čia x žymi nežinomą pamoką). Vėl kiekvienam iš šių būdų yra po du būdus išdėstyti likusias pamokas, pvz.: MSMG ir MGMS. Taigi dar $2 + 2 + 2 = 6$ būdai. Iš viso $6 + 6 =$ **12 būdų.** (Vertinga, kai mokiniai išrašo visus būdus raidėmis.)

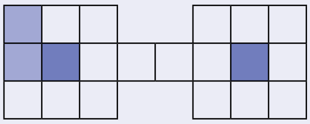
2. Kombinatorika, I dalis

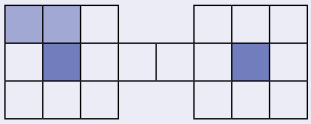
35. Pavaizduota lenta sudaryta iš 20 langelių 1×1. Keliais būdais galima uždengti jos 18 baltų langelių devyniais stačiakampiais kauliukais 1×2? (Lentos sukioti negalima. Du būdai laikomi skirtingais, jeigu bent vienas kauliukas padėtas kitaip.)



P. Pasirinkite bet kurį langelį – kiek yra skirtingų būdų jį uždengti? Kurie stačiakampiai kauliukai padedami vienareikšmiškai?

S. Pavyzdžiui, pasirinkime kairįjį viršutinį kampelį – jį galima uždengti dviem skirtingais būdais (vieną iš jų galime pavadinti V (vertikaliu), o kitą H (horizontaliu)).





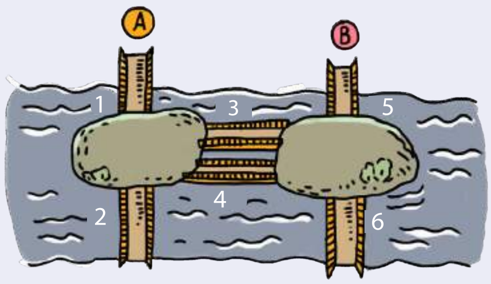
arba

Tuomet dar 8 langeliai užsidengs vienareikšmiškai. O tada dešiniajame kvadrate vėl bus galima dėlioti stačiakampius arba vienaip, arba kitaip (2 būdais). Taigi yra **4 skirtingi uždengimo būdai**: VV, HH, VH ir HV.

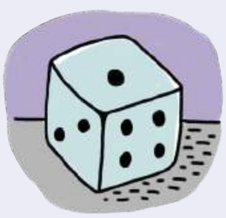
36. Per miestą teka upė, kurioje yra dvi salos. Salas jungia 6 tiltai. Iš taško A reikia patekti į tašką B, pradedant 1 tiltu ir po vieną kartą pereinant kiekvieną tiltą. Keliais maršrutais tai galima padaryti? Užrašykite juos visus.

P. Kokiu tiltu galima eiti perėjus 1 tiltą?

S. Maršrutas gali prasidėti 1–2 arba 1–3, arba 1–4.
Kiekvienai iš šių pradžių yra po du skirtingus tęsinius:
1–2–6–3–4–5, 1–2–6–4–3–5, 1–3–4–2–6–5,
1–3–6–2–4–5, 1–4–3–2–6–5 ir 1–4–6–2–3–5.
Iš viso **6 maršrutai**.



37. Skaičiai nuo 1 iki 6 ant lošimo kauliuko sienelių pavaizduoti taškeliais. Be to, priešingose sienelėse esančių taškelių suma yra lygi 7. Jei sudėtume trijų tarpusavyje besiliečiančių sienelių taškus, kiek skirtingų sumų galėtume gauti? (Pvz., paveikslėlyje matomų taškų suma lygi $1 + 2 + 4 = 7$.) Užrašykite jas visas.



P. O kiek iš viso sumų turime suskaičiuoti?

S. Sumų bus tiek, kiek yra kubo viršūnių (tai ta vieta, kur sueina 3 sienelės) – 8. Verta nustatyti, kas yra nematomose sienose ir paeiliui apskaičiuoti tas sumas. Visos **8 sumos** yra skirtingos: 6, 7, 9, 10, 11, 12, 14, 15.

2. Kombinatorika, I dalis

38. Neįprasto lošimo kauliuko šešiose sienelėse yra skaičiai 1, 2, 3, 5, 7, 9. Jei paridentume du tokius kauliukus ir sudėtume abu viršuje atsiradusius skaičius, kiek skirtingų sumų galėtume gauti? Užrašykite jas visas.

P. Kokia būtų mažiausia abiejų skaičių suma? O didžiausia? Ar galima gauti ir visus tarpinius skaičius?

S. Nuo 1 + 1 = 2 iki 9 + 9 = 18 pavyksta gauti visus skaičius, išskyrus 13, 15 ir 17. Taigi lieka 18 – 1 – 3 = **14 sumų**.

39. Saulenė turi 100 kortelių, ant kurių po vieną surašyti visi skaičiai nuo 1 iki 100. Ji suporuoja tas korteles, kurių suma lygi 50 (pvz., 12 ir 38). Kiek kortelių porų ji sudarys?

P. Ar toje poroje gali būti du vienodi skaičiai?

S. Vienodų skaičių būti negali, nes visos kortelės skirtingos.
O koks tuomet gali būti mažesnysis iš skaičių?
Bet kuris nuo 1 iki 24. Taigi yra **24 skirtingos poros**.

40. Keliais būdais skaičių 50 galima užrašyti kaip dviejų dviženklių skaičių skirtumą?

P. Jei yra skirtumas, tai yra ir turinys bei atėminys. Kokio dydžio jie gali būti?

S. Jei T – A = 50, tai mažiausias dviženklis atėminys gali būti 10. Bet didžiausias dviženklis turinys gali būti 99, atitinkamai didžiausias atėminys gali būti 49, todėl reikia suskaičiuoti, kiek yra skaičių nuo 10 iki 49 imtinai. Jų yra **40**. Tiek ir yra skirtingų būdų.

41. Žilvino krepšinio komandos vaikinai renkasi marškinėliams dviženklį skaičių, sudarytą vien iš skaitmenų 1, 3, 5, 7 ir 9. Abu skaitmenys turi būti skirtingi, be to, joks numeris negali prasidėti 3 ir baigtis 9. Kiek skirtingų numerių marškinėliams jie gali išsirinkti?

P. Koks gali būti pirmasis numerio skaitmuo?

S. Jei pirmas skaitmuo 1, galima sudaryti numerius 13, 15, 17. Jei pirmas skaitmuo 5, galima sudaryti numerius 51, 53, 57. Taip pat 71, 73, 75 bei 91, 93, 95, 97. Iš viso **13** skirtingų numerių.

42. Kiek sveikųjų skaičių tarp 700 ir 900 prasideda arba baigiasi 8?

P. Kurie skaičiais prasidės 8? Kiek jų bus?

S. 8-etu prasideda visi skaičiai nuo 800 iki 899. Jų yra 100. Dar yra besibaigiantys 8-etu, o prasidedantys 7-etu. Jų bus 10 – tiek, kiek dešimčių yra šimte (708, 718, 728, … , 798). Iš viso **110**.

2. Kombinatorika, I dalis

43. Trys draugai burtų keliu pasidalijo 5 saldainius. Keliais skirtingais būdais tai galėjo įvykti, jei kiekvienas iš jų gavo bent po 1 saldainį?

P. Kiek saldainių galėjo gauti pirmasis iš draugų?

S. Galima nagrinėti skirtingus pasiskirstymus (1–1–3 arba 2–2–1) – kiekvienam jų yra po 3 būdus. Arba galima nagrinėti, kiek saldainių galėjo gauti pirmasis iš draugų: 1, 2 arba 3. Jei 1, tai kiti gavo 1–3, 2–2 arba 3–1. Jei 2, tai kiti gavo 1–2 arba 2–1. Jei 3, tai kiti gavo 1–1. Kaip beskaičiuotumėte, iš viso yra **6 būdai**.

44. Iš skaitmenų 4, 5, 6 ir 7 galima sudaryti 24 skirtingus keturženklius skaičius, kuriuose kiekvienas iš skaitmenų panaudotas lygiai po 1 kartą. Jei visus tuos skaičius išrašytume didėjimo tvarka, koks skaičius atsidurtų 16-oje vietoje?

P. Kaip apsieiti be visų skaičių išrašymo?

S. Nebus blogai, jei mokiniai išrašys visus keturženklius skaičius didėjimo tvarka ir ras tą 16-ąjį. Bet įprotis grupuoti skaičius gali sutrumpinti sprendimą.
Pirmoji šešių skaičių grupelė prasideda skaitmeniu 4.
Antroji šešių skaičių grupelė prasideda skaitmeniu 5.
Trečioji šešių skaičių grupelė (nuo 13-o iki 18-o) prasideda skaitmeniu 6.
13 ir 14 vietose bus skaičiai, prasidedantys 64. 15 ir 16 vietose bus skaičiai, prasidedantys 65. Taigi 16-as bus **6574**.

45. Visi keturženkliai skaičiai, turintys tokius pat skaitmenis kaip ir skaičius 2011 (du vienetus, vieną nulį ir dvejetą), surašyti iš eilės didėjimo tvarka. Kiek skiriasi du artimiausi skaičiaus 2011 kaimynai?

P. O kas yra tie kaimynai?

S. Skaičiaus 2011 kaimynai yra 1210 ir 2101. Jų skirtumas – **891**.

46. Mikė sudarinėja skaičius vien iš nulių ir vienetų. Kiek mažiausiai tokių skaičių Mikei užtenka sudėti, kad suma gautųsi 2013?

P. Jei pavyko su 4 skaičiais, pabandykite su mažiau.

S. Pakanka trijų skaičių, pvz., 1011 + 1001 + 1 arba 1001 + 1001 + 11.

2. Kombinatorika, I dalis

47. Rytis surašė visus skaičius, pasižyminčius tokia savybe: pirmasis skaitmuo yra 1, kiekvienas kitas skaitmuo yra ne mažesnis už prieš jį esantį, o visų skaitmenų suma yra lygi 5. Kiek skaičių užrašė Rytis?

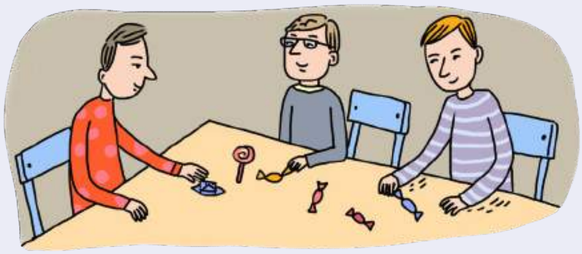
P. Koks gali būti antrasis skaičiaus skaitmuo?

S. Galima nagrinėti, kokio ilgio skaičius gali susidaryti (nuo dviženklio iki penkiaženklio) arba koks yra antrasis skaičiaus skaitmuo: 1, 2 arba 4 (nes 3 netinka). Jei 4, tai skaičius jau sudarytas: 14. Jei 2, tai toliau gausis 122. Jei 1, tai gautume variantus 11111, 1112 arba 113.
Iš viso **5 skaičiai**.

48. Trys draugai burtų keliu pasidalijo 6 saldainius. Keliais skirtingais būdais tai galėjo įvykti, jei kiekvienas iš jų gavo bent po 1 saldainį?

P. -

S. Galima nagrinėti skirtingus pasiskirstymus: 1–1–4 yra 3 būdai, 3–2–1 yra 6 būdai, 2–2–2 yra 1 būdas. Arba galima nagrinėti, kiek saldainių galėjo gauti pirmasis iš draugų: 1, 2, 3 arba 4. Jei 1, tai kiti gavo 1–4, 2–2, 3–2 arba 4–1. Jei 2, tai kiti gavo 1–3, 2–2 arba 3–1. Jei 3, tai kiti gavo 1–2 arba 2–1. Jei 4, tai kiti gavo 1–1. Kaip beskaičiuotumėte, iš viso yra **10 būdų**.



49. Skaičius vadinamas *didėjančiu*, jei kiekvienas jo skaitmuo yra didesnis nei jo kaimynas iš kairės (pvz., 2478 yra *didėjantis*, nes 2 < 4, 4 < 7, 7 < 8). Kiek iš viso yra *didėjančių* skaičių tarp 4000 ir 5000?

P. Rašykite tuos skaičius didėjimo tvarka.

S. Iš viso yra **10** skaičių: 4567, 4568, 4569, 4578, 4579, 4589, 4678, 4679, 4689, 4789.

50. Voverė prisimena, kad šio medžio trijose drevėse paliko iš viso 5 riešutus, bet neprisimena, kiek kurioje (galbūt 1 arba 2 drevės yra apskritai tuščios). Keliais skirtingais būdais gali būti išdėstyti riešutai?

P. Kiek riešutų galėtų būti pirmoje drevėje?

S. Visus variantus galima sugrupuoti pagal tai, kokie skaičiai panaudoti: 5 + 0 + 0 yra 3 variantai, 4 + 1 + 0 yra 6 variantai, 3 + 1 + 1 yra 3 variantai, 3 + 2 + 0 yra 6 variantai, 2 + 2 + 1 yra 3 variantai.

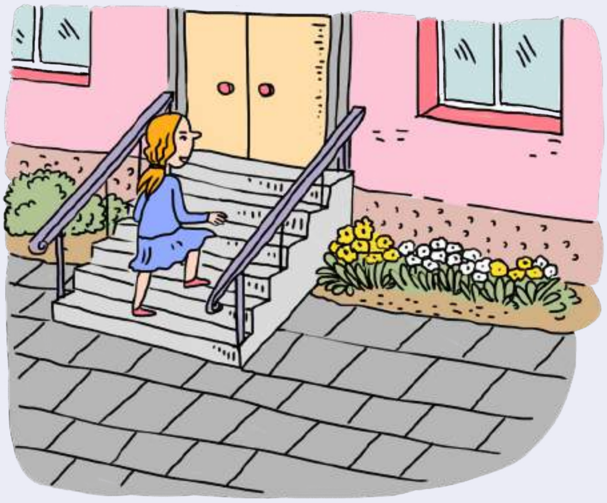
Arba galima variantus išrašinėti pagal tai, kiek riešutų yra pirmoje drevėje: jei ten 5, kitose tik 0 + 0 (1 būdas); jei ten 4, kitose 1 + 0 arba 0 + 1 (2 būdai); jei ten 3, kitose 2 + 0 arba 1 + 1, arba 0 + 2 (3 būdai); dar 4 būdai, dar 5 būdai ir dar 6 būdai.
Taigi iš viso 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = **21 būdas**.

2. Kombinatorika, I dalis

51. Kad iš lauko atsidurtų mokyklos prieangyje, Agnė turi palypėti 6 laiptelius. Vienu žingsniu ji gali užlipti 1 arba 2, arba 3 laiptelius (pavyzdžiui, iš pradžių 3, tada 1 ir galiausiai 2 laiptelius). Kiek yra skirtingų būdų užlipti iki prieangio?

P. Koks didžiausias žingsnis galėjo būti?

S. Galima grupuoti pagal žingsnelių derinį: pvz.: 3 + 3 (du trejetai, 1 būdas), 3 + 2 + 1 (6 būdai), 3 + 1 + 1 + 1 (4 būdai), 2 + 2 + 2 (1 būdas), 2 + 2 + 1 + 1 (6 būdai), 2 + 1 + 1 + 1 + 1 (5 būdai), 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 (1 būdas). Iš viso yra **24 būdai**.



Kitas metodas būtų pradėti nuo to, kad yra lygiai 1 būdas palipti 1 laiptelį. Yra 2 būdai pakilti du laiptelius: 1 + 1 ir tiesiog 2. Yra jau 4 būdai pakilti 3 laiptelius: 1 + 1 + 1, 1 + 2, 2 + 1 ir tiesiog 3. Kad pakiltų iki 4 laiptelio, Agnė gali ant jo atsidurti nuo pirmojo laiptelio, nuo antrojo ir nuo trečiojo. Tad bendras variantų skaičius bus visų trijų ankstesnių suma: 1 + 2 + 4 = 7. Lygiai taip pat, skaičiuodami būdus užkopti ant 5-ojo laiptelio, sudedame 2-ąjį, 3-iąjį ir 4-ąjį būdus: 2 + 4 + 7 = 13. Užkopti ant šeštojo laiptelio bus 4 + 7 + 13 = 24 būdai.