

## 6. Turnyrai. B dalis

### Įvadas

#### Mokytojui

Turnyrų uždaviniai priskiriami kombinatorikos sričiai.

Šioje moduliuko dalyje mokiniai toliau mokysis nustatyti rungtynių rezultatus, suskaičiuoti rungtynių skaičių, bendrą visų komandų surinktų taškų skaičių. Spręsdami sudėtingesnius uždavinius turės nustatyti ir įvykusių lygiųjų skaičių. Mokiniais reikės pildyti nesudėtingas turnyrų lenteles.

Derėtų pasitikrinti, ar mokiniai supranta, kurie turnyro lentelės langeliai užpildomi įvykus tam tikroms rungtynėms, bei kuo skiriasi šachmatų ir futbolo turnyrų lentelių pildymas. Tokiam supratimui gali pasitarnauti šie keli pavyzdžiai su 4 žaidėjais (komandomis).

Įvykus vienerioms rungtynėms, po jų užpildomi du langeliai, esantys atitinkamų eilučių ir stulpelių susikirtimuose: jei A sužaidė su B, tai pildomas A eilutės ir B stulpelio susikirtimo langelis bei B eilutės ir A stulpelio susikirtimo langelis. Faktas, kad A laimėjo prieš B, o B sužaidė lygiosiomis su D šachmatuose būtų vaizduojamas taip (kairėje), o futbole – šitaip (dešinėje):

	A	B	C	D
A		1		
B	0			1/2
C				
D		1/2		

	A	B	C	D
A		3		
B	0			1
C				
D		1		

Tačiau futbole dažnai svarbu būna ne tik kas laimėjo, bet ir kiek įvarčių kuri komanda įmušė. Todėl faktas, kad A laimėjo prieš B rezultatu 2:1, o B sužaidė lygiosiomis su D 2:2, būtų vaizduojamas taip:

	A	B	C	D	Pergalės	Lygiosios	Pralaimėjimai	Taškai	Įvarčių santykis	Vieta
A		2:1			1			3	2:1	
B	1:2			2:2		1	1	1	3:4	
C									:	
D		2:2				1		1	2:2	

Atkreipkite dėmesį, kad A eilutėje/B stulpelyje rašome 2:1 (A prieš B įmušė du įvarčius ir vieną praleido), o B eilutėje/A stulpelyje rašome 1:2 (B prieš A įmušė vieną įvartį ir du praleido). Stulpelyje „Įvarčių santykis“ rašome bendrą tos komandos įmuštų įvarčių kiekį, o po dvitaškio – bendrą praleistų įvarčių kiekį.

Uždaviniai pateikti sunkėjimo tvarka ir tinka tiek 5–6, tiek 7–8 klasių mokiniams.

5–6 klasių mokiniai, prieš spręsdami šiuos uždavinius, būtinai turi būti išsprendę moduliuko A dalį.

Pirmajame lape pateikti du uždaviniai iš A dalies, tad jei minėti uždaviniai buvo neseniai išspręsti, šį lapą galima ir praleisti.

## 6. Turnyrai. B dalis

### Mokiniui

Turnyrų lentelės pildymas primena galvosūkį sudoku: kreipdami dėmesį į išvardintus apribojimus, pirmiausia užpildome tuos langelius, kurių kitaip nebūtų galima užpildyti. Vėliau, kai visi „privalomi“ langeliai užpildyti, pereiname prie įvairių variantų perrinkimo: „Jei šis langelis būtų lygiosios, pergalė arba pralaimėjimas, tai...“ Kur mus tai nuves? Jei veda į prieštaravimą, atmetame pasirinktą variantą ir nagrinėjame kitą.

### Taškų skaičiavimo taisyklės:

Šachmatuose už pergalę skiriamas 1 taškas, už lygiąsias – pusė taško.

Futbole už pergalę skiriami 3 taškai, už lygiąsias – 1 taškas.

Tenise ir tinklinyje už pergalę skiriamas 1 taškas, lygiųjų nebūna.

Nė vienoje sporto šakoje pralaimėjusiems taškai neskiriami.

Vieno rato turnyre kiekvienas dalyvis (komanda) su kiekvienu kitu (kita) sužaidžia lygiai po vieną kartą.

## Uždaviniai

**8.** Kiek įvyksta rungtynių vieno rato varžybose, kuriose dalyvauja:

a) 5 komandos; b) 6 komandos; c) 10 komandų.

**P.** Kai įvyksta rungtynės, kelioms komandoms jos yra įskaitomos?

**S.** Kiekvienos rungtynės įskaitomos dviem komandoms. Tad sudėkime visų komandų varžovų kiekį ir padalinkime iš 2.

a)  $5 \cdot 4 / 2 = 10$ , b)  $6 \cdot 5 / 2 = 15$ , c)  $10 \cdot 9 / 2 = 45$ .

### Paaiškinimas:

- Kiek lentelėje langelių?  $5 \times 5 = 25$ .
- Ką reiškia nuspalvinti langeliai? Komanda pati su savimi nežaidžia – jie nepildomi.
- Kiek yra nepildomų langelių? 5.
- Kiek langelių liko?  $25 - 5 = 20$ .
- Keli langeliai užpildomi, kai įrašomas vienerių rungtynių rezultatas? 2.
- Kiek tokių įrašymų galime padaryti?  $20:2 = 10$ .

Tiek ir bus rungtynių.

Žaidėjas	1	2	3	4	5	Iš viso taškų
1						
2						
3						
4						
5						

## 6. Turnyrai. B dalis

9. Penkiolika šachmatininkų sužaidė vieno rato turnyrą. Ar galėjo taip nutikti, kad kiekvienas dalyvis 5 kartus sužaidė lygiosiomis?

P. Kaip suskaičiuoti bendrą turnyre įvykusių lygiųjų skaičių?

S. Kiekvienos lygiosios įskaitomos dviem komandoms. Tad sudėkime visų komandų lygiąsias ir padalinkime iš 2. Bet  $15 \cdot 5 = 75$ , šis skaičius iš 2 nesidalija. Vadinasi, taip **nutikti negalėjo**.

10. Krepšinio turnyre dalyvauja 32 komandos. Turnyras vykdomas etapais. Kiekviename etape komandos suskirstomos į grupes – po keturias kiekvienoje grupėje. Visose grupėse kiekviena komanda su likusiomis žaidžia vienerias rungtynes. Po grupės susitikimų dvi geriausios komandos patenka į kitą etapą, kitos dvi – iškrenta. Pasibaigus etapui, į kurį patenka jau tik keturios komandos, dvi geriausios tos grupės ekipos žaidžia finalines rungtynes. Kiek iš viso rungtynių bus sužaista šiame turnyre?

P. Nuosekliai užrašykite, kiek grupių susidaro kiekviename etape, kiek įvyksta rungtynių kiekvienoje grupėje bei kiek iš viso rungtynių įvyksta kiekviename etape.

S. Kiekvienoje 4 komandų grupėje įvyksta  $4 \cdot 3 / 2 = 6$  rungtynės.

Atsakymas: **91 rungtynės**.

Etapo nr.	Komandų skaičius	Grupių skaičius	Rungtynių skaičius
1	32	8	48
2	16	4	24
3	8	2	12
4	4	1	6
5	2	0	1
		<b>Iš viso</b>	<b>91</b>

11. Lentelėje pateikti vieno rato futbolo turnyro kai kurie rezultatai. Likusiųjų rungtynių rezultatai buvo tokie: 2:0, 1:1, 2:2, 3:1 ir 5:3. Baikite pildyti šią lentelę. Būtinai paaiškinkite, kokia tvarka ir kodėl būtent taip užpildėte langelius.

	A	B	C	D	Pergalės	Lygiosios	Pralaimėjimai	Taškai	Įvarčių santykis	Vieta
A				1:0					2:	
B									:8	
C								9	:	
D									:	

## 6. Turnyrai. B dalis

**P.** Kaip komanda C surinko 9 taškus? Kokie buvo kiti A komandos žaistų rungtynių rezultatai, jei ji iš viso įmušė 2 įvarčius?

**S.** 9 taškai per trejas rungtynes – vadinasi, visas 3 pergalės iškovojo C komanda. A komanda iš viso įmušė 2 įvarčius, tad jai galima priskirti tik pralaimėjimą prieš

	A	B	C	D	Pergalės	Lygiosios	Pralaimėjimai	Taškai	Įvarčių santykis	Vieta
A		1:1	0:2	1:0	1	1	1	4	2:3	II
B	1:1		3:5	2:2	0	2	1	2	6:8	III
C	2:0	5:3		3:1	3	0	0	9	10:4	I
D	0:1	2:2	1:3		0	1	2	1	3:6	IV

C komandą rezultatu 0:2 ir lygiąsias su B komanda 1:1. Tada aišku, kad B komandos rezultatas su D komanda yra 2:2. Tam, kad B komanda praleistų 8 įvarčius, ji turi pralaimėti prieš C komandą rezultatu 3:5. Teliko vienos rungtynės C komandos su D 3:1. Galutinė lentelė atrodo taip. Atkreipkite dėmesį, ar visos komandos kartu praleido tiek pat įvarčių, kiek ir įmušė.

Žaidėjas	1	2	3	4	5	Iš viso taškų	Vieta
1							I
2							II
3							III
4							IV
5							V

12.

Penki šachmatininkai sužaidė po 1 kartą su kiekvienu varžovu. Pasirodo, visi surinko skirtingą taškų skaičių. Pirmąją vietą užėmęs šachmatininkas nė karto nesužaidė lygiosiomis, užėmęs antrąją vietą nepatyrė nė vieno pralaimėjimo, o užėmęs ketvirtąją – nė vienos pergalės. Nustatykite visų turnyro rungtynių rezultatus ir įrašykite į pateiktą lentelę. Paaiškinkite, kokia tvarka ir kodėl būtent taip užpildėte langelius.

**P.** Kurį langelį galite užpildyti iš pradžių? Kaip likusias rungtynes sužaidė tie patys dalyviai?

Žaidėjas	1	2	3	4	5	Iš viso taškų	Vieta
1		0	1	1	1	3	I
2	1		1/2	1/2	1/2	2,5	II
3	0	1/2		1/2	1	2	III
4	0	1/2	1/2		1/2	1,5	IV
5	0	1/2	0	1/2		1	V

**S.**

Tarkime, kad pirmas žaidėjas užėmė I vietą, antrasis – II ir t. t. Pirmas neiškovojo lygiųjų, o antrasis – pralaimėjimų. Todėl antrasis laimėjo prieš pirmąjį. Tuomet antrasis turės dar bent 3 lygiąsias, todėl iš viso bent 2,5 taško. Kad pirmasis surinktų daugiau taškų, likusias 3 partijas jis turi laimėti (užpildome 1 ir 2 visas žaistas rungtynes). Trečiasis negali laimėti abiejų likusių partijų, nes taip pat surinktų 2,5 taško. Vienintelis būdas, kad trys prasčiausi žaidėjai išsidėstytų tokiu būdu ir kad ketvirtasis nė kart nelaimėtų parodytas lentelėje.

## 6. Turnyrai. B dalis

**13.** Petriukas, tik sužinojęs šachmatų taisykles, sako: „Jeigu man tektų vienu metu žaisti prieš du geriausius pasaulio šachmatininkus, prieš vieną baltaisiais, prieš kitą juodaisiais, aš būtinai gaučiau bent vieną tašką iš dviejų galimų.“

Negi jam iš tikrųjų gali tai pavykti, jei didmeistriai žais visu savo pajėgumu?

**P.** Ar yra kokių nors ribojimų, kada Petriukas turi daryti ėjimą kurioje nors iš lentų?

**S.** Petriukas pirmoje lentoje žaidžia juodaisiais, o antroje – baltaisiais. Pirmoje lentoje, sulaukęs didmeistrio ėjimo, pakartoja jį antroje lentoje. Ir, sulaukęs atsakymo antroje lentoje, atkartoja jį pirmoje lentoje. Taigi didmeistriai kovoja tarpusavyje ir arba bus lygiosios (pusė + pusė taško gaus Petriukas), arba kuris nors vienas laimės, o Petriukas gaus  $1 + 0$  taško.

**14.** Vieno rato tinklinio turnyre 20 % komandų nelaimėjo nė vienų rungtynių. Kiek iš viso komandų dalyvavo turnyre?

**P.** Kiek daugiausiai komandų gali nė karto nelaimėti?

**S.** Jei manytumėme, kad yra daugiau nei 1 komanda, kuri pralaimėjo visas rungtynes, apiktumėme prieštaravimą – juk tos 2 „amžinos pralaimėtojos“ turėjo susitikti tarpusavyje ir kažkuri turėjo švęsti pergalę. Todėl yra tik 1 komanda, nelaimėjusi nė vienų rungtynių, o iš viso dalyvavo **5 komandos**.

**15.** Dviejų ratų futbolo turnyre (jame kiekviena komanda sužaidžia po 2 kartus su kiekviena kita) dalyvauja 16 komandų.

- Kiek daugiausiai ir kiek mažiausiai taškų gali surinkti komanda tokiam turnyre?
- Kiek daugiausiai ir kiek mažiausiai taškų gali surinkti visos komandos kartu?

**P.** Kiek rungtynių sužaidžia kiekviena komanda? Kiek iš viso sužaidžiama rungtynių?

**S.** Kiekviena komanda sužaidžia  $15 \cdot 2 = 30$  rungtynių, o iš viso sužaidžiama  $16 \cdot 15 = 240$  rungtynių, per kurias „skiriami“ 2 arba 3 taškai.

Atsakymas: a) **90 ir 0 taškų**, b) **720 ir 480 taškų**.

**16.** Vieno rato šachmatų turnyre vienas šachmatininkas iš žaidimo pasitraukė sužaidęs ne visas partijas, todėl iš viso tame turnyre buvo sužaistos 24 partijos. Kiek jame buvo dalyvių ir kiek partijų sužaidė pasitraukusysis?

**P.** Kiek šachmatininkų galėjo dalyvauti šiame turnyre nuo pradžių?

## 6. Turnyrai. B dalis

**S.** Jeigu dalyvavo daugiau nei 8 šachmatininkai, jie būtų sužaidę bent  $8 \cdot 7 / 2 = 28$  partijas, todėl spėjimas netinka.

Jeigu dalyvavo mažiau nei 8 šachmatininkai, jie būtų sužaidę ne daugiau kaip  $7 \cdot 6 / 2 = 21$  partiją, šis spėjimas taip pat netinka.

Vadinasi, iš pradžių buvo **8 dalyviai**, o pasitraukusysis sužaidė  $24 - 7 \cdot 6 / 2 = 3$  partijas.

**17.** Vieno rato futbolo turnyre dalyvavo 8 komandos. Jos surinko atitinkamai 15, 14, 13, 9, 8, 7, 4 ir 3 taškus. Kiek rungtynių baigėsi lygiosiomis?

**P.** Kiek rungtynių įvyko šiame turnyre? O kiek visos komandos kartu surinko taškų?

**S.** Tokiame turnyre įvyksta  $7 \cdot 8 / 2 = 28$  rungtynės, o taškų iš viso surenkama  $15 + 14 + 13 + 9 + 8 + 7 + 4 + 3 = 73$ . Jeigu įvyko  $x$  lygiųjų, tai visų surinktų taškų suma  $2x + 3 \cdot (28 - x) = 73$ ;  $84 - x = 73$ ;  $x = 11$ . Atsakymas: **11 lygiųjų**.

**18.** Septynios futbolo komandos sužaidė vieno rato turnyrą, o prizines vietas užėmusios komandos kartu surinko pusę visų komandų surinktų taškų. Ar tame turnyre galėjo įvykti 6 lygiosios?

**P.** Kiek rungtynių įvyko šiame turnyre? Ką dar galima suskaičiuoti?

**S.** Tokiame turnyre įvyksta  $7 \cdot 6 / 2 = 21$  rungtynės, jeigu 6 iš jų baigtųsi lygiosiomis, tai visų komandų surinktų taškų suma būtų lygi  $2 \cdot 6 + 15 \cdot 3 = 57$ , prizininkai negalėtų surinkti lygiai pusės taškų. Atsakymas: **negalėjo**.