

## 7. Turnyrai. C dalis

### Įvadas

#### Mokytojui

Turnyrų uždaviniai priskiriami kombinatorikos sričiai.

Paskutinėje moduliuko dalyje moksleiviai turės užpildyti sudėtingesnes turnyrų lenteles.

Uždaviniai pateikti sunkėjimo tvarka ir yra skirti 7–8 klasių mokiniams, tačiau juos gali spręsti ir 5–6 klasių mokiniams (išskyrus paskutinį uždavinį).

Visi mokiniai, prieš spręsdami šiuos uždavinius, būtinai turi būti išsprendę modulio B dalį.

#### Mokiniui

Turnyrų lentelės pildymas primena galvosūkį sudoku: kreipdami dėmesį į išvardintus apribojimus, pirmiausia užpildome tuos langelius, kurių kitaip nebūtų galima užpildyti. Vėliau, kai visi „privalomi“ langeliai užpildyti, pereiname prie įvairių variantų perrinkimo: „Jei šis langelis būtų lygiosios, pergalė arba pralaimėjimas, tai...“ Kur mus tai nuves? Jei veda į prieštaravimą, atmetame pasirinktą variantą ir nagrinėjame kitą.

#### Taškų skaičiavimo taisyklės:

Šachmatuose už pergalę skiriamas 1 taškas, už lygiąsias – pusė taško.

Futbole už pergalę skiriami 3 taškai, už lygiąsias – 1 taškas.

Tenise ir tinklinyje už pergalę skiriamas 1 taškas, lygiųjų nebūna.

Nė vienoje sporto šakoje pralaimėjusiems taškai neskiriami.

Vieno rato turnyre kiekvienas dalyvis (komanda) su kiekvienu kitu (kita) sužaidžia lygiai po vieną kartą.

### Uždaviniai

**19.** Vieno rato futbolo turnyre dalyvavo 5 komandos ir surinko atitinkamai taškų: 10, 9, 4, 3 ir 1. Nustatykite visų turnyro rungtynių rezultatus ir įrašykite juos į pateiktą lentelę. Paaiškinkite, kokia tvarka ir kodėl būtent taip užpildėte langelius.

**P.** Kiek šiame turnyre įvyko rungtynių?  
O kiek rungtynių baigėsi lygiosiomis?

Komanda	1	2	3	4	5	Iš viso taškų
1						
2						
3						
4						
5						

## 7. Turnyrai. C dalis

**S.** Visų komandų surinktų taškų suma yra 27, o rungtynių buvo  $5 \cdot 4/2 = 10$ , taigi, įvyko 3 lygiosios. Todėl bus šeši vienetukai turnyri-  
nėje lentelėje.

$10 = 3 + 3 + 3 + 1$  (vienintelis būdas)

$9 = 3 + 3 + 3 + 0$  (vienintelis būdas,

be to, vienintelis pralaimėjimas –  
nuo pirmosios vietos)

$4 = 3 + 1 + 0 + 0$  (1 + 1 + 1 + 1 netinka,  
nes antroji vieta neturi lygiųjų)

$1 = 1 + 0 + 0 + 0$  (vienintelis būdas)

$3 = 1 + 1 + 1 + 0$  (3 + 0 + 0 + 0 netinka,  
nes trūktų vienetukų, be to, vienintelis  
pralaimėjimas – nuo antrosios vietos)

Likę langeliai užpildomi vienareikšmiškai.

Komanda	1	2	3	4	5	Iš viso taškų
1		3	3	1	3	10
2	0		3	3	3	9
3	0	0		1	3	4
4	1	0	1		1	3
5	0	0	0	1		1

20.

Vieno rato futbolo turnyre dalyvavo 5 komandos. Keturiuos iš jų surinko atitinkamai taškų: 1, 2, 5 ir 7. Nustatykite visų turnyro rungtynių rezultatus ir įrašykite juos į pateiktą lentelę. Paaiškinkite, kokia tvarka ir kodėl būtent taip užpildėte langelius.

**P.** Kokiu būdu komandos galėjo surinkti būtent tiek taškų?

**S.**  $7 = 3 + 3 + 1 + 0$  (vienintelis būdas)  
 $5 = 3 + 1 + 1 + 0$  (vienintelis būdas)  
 $2 = 1 + 1 + 0 + 0$  (vienintelis būdas)  
 $1 = 1 + 0 + 0 + 0$  (vienintelis būdas)  
 Yra 3 trejetai ir 7 nuliai, trūksta 4 trejetų.  
 Todėl penktoji surinko  
 $3 + 3 + 3 + 3 = 12$  taškų.

I vietai įrašome visas pergalės, o varžovams – pralaimėjimus. II ir III vietos neturi pralaimėjimų, todėl tarpusavyje sužaidė lygiosiomis. Vadinasi, II vieta laimėjo prieš dvi paskutines. IV vieta beturi tik lygiąsias – jas ir įrašome. Liko paskutinis langelis – III laimėjo prieš V.

Komanda	1	2	3	4	5	Iš viso taškų
1						
2						
3						
4						
5						

Komanda	1	2	3	4	5	Iš viso taškų
1		3	3	3	3	12
2	0		1	3	3	7
3	0	1		1	3	5
4	0	0	1		1	2
5	0	0	0	1		1

## 7. Turnyrai. C dalis

21. Pasibaigus vieno rato futbolo turnyrai, visos komandos kartu buvo surinkusios 21 tašką. Kiek komandų dalyvavo?

P.

-

S.

Jeigu dalyvavo daugiau nei 5 komandos, jos sužaidė daugiau nei  $5 \cdot 6/2 = 15$  rungtynių ir visos kartu galėjo surinkti mažiausiai 30 taškų.

Jeigu dalyvavo mažiau nei 5 komandos, jos sužaidė ne daugiau nei  $4 \cdot 3/2 = 6$  rungtynes ir visos kartu galėjo surinkti daugiausiai 18 taškų.

Todėl dalyvavo lygiai 5 komandos (ir 9 rungtynės baigėsi lygiosiomis.)

22. Stalo teniso pirmenybės vyksta vadovaujantis olimpine sistema. Nugalėtojas laimėjo 6 partijas. Kiek pirmenybių žaidėjų laimėjo daugiau partijų negu pralaimėjo?

(Pirmajame pirmenybių, vykdomų olimpine sistema, ture žaidėjai paskirstomi į poras. Pralaimėję pirmąją partiją iškrenta iš pirmenybių, o tie, kurie pirmame ture nugalėjo, suskirstomi į poras ir vyksta antrasis turas. Pralaimėję vėl iškrenta, o laimėtojai vėl skirstomi į poras ir t. t., kol lieka vienas nugalėtojas. Yra žinoma, kad kiekviename pirmenybių ture kiekvienas žaidėjas turėjo porą).

P.

Kiek dalyvių varžėsi šiame turnyre? Kiek pralaimėjimų gali turėti bet kuris dalyvis? Kiek pergalių reikia turėti, kad jų būtų daugiau nei pralaimėjimų?

S.

Pasibaigus pirmenybėms, bet kuris dalyvis, išskyrus pirmenybių nugalėtoją, turi lygiai 1 pralaimėjimą. Taigi suskaičiuokime tuos žaidėjus, kurie turi bent 2 pergales. Jei nugalėtojas laimėjo 6 partijas, vadinasi, buvo 6 turai. Paskutiniame, šeštajame, iš viso buvo 2 žaidėjai. Priešpaskutiniame, 5-ajame – 4 žaidėjai. 4-ajame – 8 žaidėjai, 3-iajame – 16 žaidėjų, 2-ajame – 32 žaidėjai, o pirmajame – 64 žaidėjai. Kas įvyko pirmajame ture? 32 žaidėjai pralaimėjo ir iškrito iš tolimesnių varžybų. Kiti 32 iškovojo po 1 pergalę. Kas įvyko antrajame ture? 16 žaidėjų pralaimėjo ir iškrito iš tolimesnių varžybų, turėdami 1 pergalę ir 1 pralaimėjimą. Kiti 16 iškovojo po antrą pergalę. Tai ir yra uždavinio atsakymas – **16 žaidėjų**, kurie laimėjo daugiau partijų nei pralaimėjo.

23. Lentelėje pateikti vieno rato futbolo turnyro kai kurie rezultatai. Baikite pildyti lentelę. Paaiškinkite, kokia tvarka ir kodėl būtent taip užpildėte langelius.

	A	B	C	D	Pergalės	Lygiosios	Pralaimėjimai	Taškai	Įvarčių santykis	Vieta
A			1:1						:3	
B									3:1	I-a
C								1	:4	
D	:3	1:						3	:5	

## 7. Turnyrai. C dalis

- P.** Kurį dar langelį galima iškart užpildyti? Kaip su kitomis komandomis sužaidė ta komanda, kuri iš viso surinko 1 tašką?
- S.** Jei žinome, kaip sužaidė A prieš C, tai taip pat žinome, kaip C sužaidė prieš A – 1:1.

C komanda surinko 1 tašką, taigi likusias 2 rungtynes pralaimėjo. Žinome, kad D laimėjo prieš C. Vadinasi, D (iš viso surinkusi 3 taškus) likusias rungtynes pralaimėjo. Kadangi D, žaisdama prieš A, praleido 3 įvarčius, o iš viso 5, be to, D prieš B pralaimėjo, tai D su B sužaidė būtinai 1:2, o D prieš C nepraleido įvarčio. Užfiksuokime iki šiol sužinotus rezultatus.

	A	B	C	D	Pergalės	Lygiosios	Pralaimėjimai	Taškai	Įvarčių santykis	Vieta
A			1:1	3:					:3	
B				2:1					3:1	I
C	1:1			0:	0	1	2	1	:4	
D	:3	1:2	:0		1	0	2	3	:5	

B komanda laimėjo prieš C, o per jos abejas nežinomas rungtynes tebuvo įmuštas 1 įvartis ir nebuvo praleista nė vieno. Tad būtinai B su C bus 1:0, o B su A 0:0. Žinodami bendrą C praleistų įvarčių skaičių, suskaičiuojame, kiek C praleido, žaisdama su D (2). Analogiškai, žinodami bendrą A praleistų įvarčių kiekį, suskaičiuojame, kiek A praleido žaisdama su D – 2. Galutinė lentelė atrodo taip. Atkreipkite dėmesį, ar visos komandos kartu praleido tiek pat įvarčių, kiek ir įmušė.

	A	B	C	D	Pergalės	Lygiosios	Pralaimėjimai	Taškai	Įvarčių santykis	Vieta
A		0:0	1:1	3:2	1	2	0	5	4:3	II
B	0:0		1:0	2:1	2	1	0	7	3:1	I
C	1:1	0:1		0:2	0	1	2	1	1:4	IV
D	2:3	1:2	2:0		1	0	2	3	5:5	III

## 7. Turnyrai. C dalis

24.

Vieno rato šachmatų turnyre dalyvavo 6 šachmatininkai: A, B, C, D, E ir F. Po turnyro paaiškėjo, kad žaidėjas A visas partijas sužaidė lygiosiomis, žaidėjas B nepralaimėjo nė vienos partijos, C laimėjo prieš turnyro nugalėtoją, o D aplenkė E, bet surinko mažiau taškų už F.

- Kas tapo turnyro nugalėtoju?
- Kiek taškų surinko turnyro nugalėtojas?
- Kiek taškų surinko kiekvienas turnyro dalyvis?
- Keliais skirtingais būdais galima užpildyti šio turnyro lentelę?

**P.** Kurie žaidėjai negali laimėti turnyro?

**S.** a) C laimėjo prieš turnyro nugalėtoją, todėl nei C nėra nugalėtojas, nei tie, kurie neturi pralaimėjimų (A ir B). Tarp likusiųjų daugiausiai taškų surinko F, todėl jis ir nugalėjo.

b) Užpildome visas A žaistas rungtynes ir C prieš F. Kaip galėjo sužaisti B su nugalėtoju F? Jei B laimėtų, tai jis surinktų ne mažiau kaip 3 taškus, o F – ne daugiau kaip 2,5 taško. Netinka, todėl B su F sužaidė lygiosiomis. Kad F taptų nugalėtoju, jis turi laimėti abi likusias rungtynes prieš D ir E. Taip ir užpildome.

- C jau turi 2 taškus, tad per likusias dvi rungtynes jis negali gauti daugiau kaip pusę taško (jei gautų daugiau – susilygintų su F arba aplenkėtų jį). Kas būtų, jei C abejas rungtynes pralaimėtų? Tuomet D ir E turėtų po 2 taškus ir, kaip jie besužaistų, būtų negerai – arba D neaplenktų E, arba kažkuris žaidėjas surinktų 3 taškus kaip ir F. Taigi C surinko lygiai 2,5 taško. D su E prieš C iškovojo 1,5 taško, be to, žaisdami tarpusavyje, pasidalijo 1 tašką. D negali surinkti daugiau nei 2,5, bet mažiau taip pat negali surinkti, nes neaplenktų E. Taigi D iš viso sukaupė 2,5 taško, o E – 2 taškus.
- Išbandome abu variantus žaidėjui C iškrovoti lygiai 0,5 taško prieš D ir E (vienos lygiosios + vienas pralaimėjimas). Jau žinome D ir E taškus turnyro pabaigoje, jų tarpusavio rungtynių rezultatas nustatomas vienareikšmiškai. Taigi yra du skirtingi būdai užpildyti šio turnyro lentelę.

	A	B	C	D	E	F	Taškai	Vieta
A								
B								
C								
D								
E								
F								

	A	B	C	D	E	F	Taškai	Vieta
A		1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	2,5	
B	1/2		1/2	1/2	1/2	1/2	2,5	
C	1/2	1/2				1		
D	1/2	1/2				0		
E	1/2	1/2				0		
F	1/2	1/2	0	1	1		3	1

## 7. Turnyrai. C dalis

	A	B	C	D	E	F	Taškai	Vieta
A		1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	2,5	
B	1/2		1/2	1/2	1/2	1/2	2,5	
C	1/2	1/2		1/2	0	1	2,5	
D	1/2	1/2	1/2		1	0	2,5	
E	1/2	1/2	1	0		0	2	
F	1/2	1/2	0	1	1		3	I

	A	B	C	D	E	F	Taškai	Vieta
A		1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	2,5	
B	1/2		1/2	1/2	1/2	1/2	2,5	
C	1/2	1/2			1/2	1	2,5	
D	1/2	1/2	1		1/2	0	2,5	
E	1/2	1/2	1/2	1/2		0	2	
F	1/2	1/2	0	1	1		3	I

25.

Penkių komandų futbolo turnyras nutrūko dar nepasibaigęs. Tuo metu jokios kitos dvi komandos neturėjo tokio pat taškų skaičiaus, o visos komandos jau turėjo bent po vieną tašką. Nurodykite patį mažiausią galimą sužaistų rungtynių skaičių, po kurio galėjo nutrūkti toks turnyras. Užpildykite turnyro rezultatų lentelę.

Komanda		1	2	3	4	5	Iš viso taškų
1							
2							
3							
4							
5							

P.

Kiek mažiausiai taškų gali turėti visos komandos kartu? Kiek rungtynių tam reikia sužaisti? Patikrinkite, ar tikrai per tiek rungtynių galima iškovoti būtent tiek taškų.

S.

Visos komandos kartu mažiausiai gali surinkti  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$  taškų. Jei per vienerias rungtynes iškovoja daugiausiai 3 taškai, tai reikėtų sužaisti 5 rungtynes. Bet 3 taškai iškovojami tik tuo atveju, jei neįvyksta lygiosios. Tad jokia komanda negalėtų pelnyti 1 taško. Vadinasi, 5 rungtynių nepakanka. Užpildykite turnyro lentelę su 6 rungtynėmis. Kiek tuomet įvyktų lygiųjų? Jeigu įvyko  $x$  lygiųjų, tai visų surinktų taškų suma  $2x + 3 \cdot (6 - x) = 15$ ;  $18 - x = 15$ ;  $x = 3$ .

Kiek taškų pelnytų komandos?

$5 = 3 + 1 + 1$  + galbūt kažkiek nulių;

$2 = 1 + 1$  + galbūt kažkiek nulių;

$1 = 1$  + galbūt kažkiek nulių.

Jau turime 5 vienetukus už lygiosiomis sužaistas rungtynes, tad galime (ir turime) panaudoti dar lygiai 1 vienetuką.

Tuomet  $4 = 3 + 1$  + galbūt kažkiek nulių, o  $3 = 3$  + galbūt kažkiek nulių. Iš viso matome 3 trejetukus, vadinasi, bus lygiai 3 nuliai.

Juos galima išdėstyti, pavyzdžiui, taip:

Komanda		1	2	3	4	5	Iš viso taškų
1			1		1	3	5
2	1		3				4
3		0		3			3
4	1		0			1	2
5	0			1			1

## 7. Turnyrai. C dalis

26. Ar gali vieno rato šachmatų turnyre daugiausiai partijų laimėjęs dalyvis likti paskutinėje vietoje? Jei ne, pagrįskite kodėl. Jei taip, sudarykite tokio turnyro rezultatų lentelę.

P. Su 3, 4 arba 5 dalyviais tokios lentelės sudaryti nepavyks, tad bandykite su daugiau šachmatininkų.

S. Mažiausias dalyvių skaičius – 6. Sužaisti galėjo, pavyzdžiui, taip:

	A	B	C	D	E	F	Taškai	Vieta
A		1/2	1/2	1/2	1/2	1	3	I
B	1/2		1/2	1/2	0	1	2,5	II
C	1/2	1/2		0	1/2	1	2,5	II
D	1/2	1/2	1		1/2	0	2,5	II
E	1/2	1	1/2	1/2		0	2,5	II
F	0	0	0	1	1		2	III

27. Vieno rato futbolo turnyrą sužaidė 17 komandų. Ar galėjo kiekviena iš tų 17 komandų laimėti tiek pat rungtynių, kiek jų ji sužaidė lygiosiomis?

P. Kiek iš viso įvyko rungtynių? Kas (ir kiek) įrašoma į turnyro lentelę, kai įvyksta lygiosios ir kai jos neįvyksta?

S. Iš viso įvyko  $17 \cdot 16/2 = 136$  rungtynės. Tarkime, kiekviena iš tų 17 komandų laimėjo lygiai tiek pat rungtynių, kiek jų ji sužaidė lygiosiomis. Tegul bendras lygiosiomis pasibaigusių rungtynių skaičius yra  $x$ . Tuomet į turnyro lentelę iš viso būtų įrašyta  $2x$  vienetukų. Jei kiekviena komanda laimėjo tiek pat rungtynių, kiek jų ji sužaidė lygiosiomis, tai turi būti įrašyta ir  $2x$  trejetukų, t. y. dar  $2x$  rungtynių turi baigtis ne lygiosiomis. Taigi iš viso įvyktų  $x + 2x = 3x$  rungtynių. Bet lygtis  $3x = 136$  neturi sveikųjų sprendinių, **todėl taip būti negalėjo**.