

# 2004 M. MATEMATIKOS

## MOKYKLINIO BRANDOS EGZAMINO REZULTATŲ

# KOKYBINĖ ANALIZĖ

Jolita Dudaitė, Marytė Stričkienė

### KOKYBINĖS ANALIZĖS TIKSLAI, UŽDAVINIAI, ŠALTINIAI

Mokyklinių brandos egzaminų analizė rengiama pirmą kartą. Joms parengti iš mokyklų atsitiktinės atrankos būdu buvo surinkta mokinių egzamino darbų imtis (kiekvieno dalyko po 500 egzamino darbų). Šie darbai buvo sukoduoti (pažymėtos tipinės klaidos, sprendimo būdai ir pan.) ir pakartotinai įvertinti pagal egzamino vertinimo instrukciją. Kokybinės analizės tikslas – išsiaiškinti, kaip mokiniai, kurie renkasi mokyklinius brandos egzaminus, išmano mokomąjį dalyką, kokias jie daro pagrindines klaidas, su kokiais sunkumais susiduria mokytojai, vertindami mokinių darbus.

2004 metų matematikos mokyklinio brandos egzamino rezultatų kokybine analize siekiama:

- išanalizuoti egzamino užduoties uždavinių sprendimo rezultatus;
- išnagrinėti mokinių dažniausiai darytas klaidas;
- aptarti mokinių taikytus uždavinių sprendimo metodus;
- panagrinėti mokinių darbų vertinimo problemas;
- pateikti rekomendacijas mokytojams.

Egzamino užduoties uždavinių sprendimo rezultatai aptariami priskiriant juos vienai ar kitai matematikos turinio sričiai:

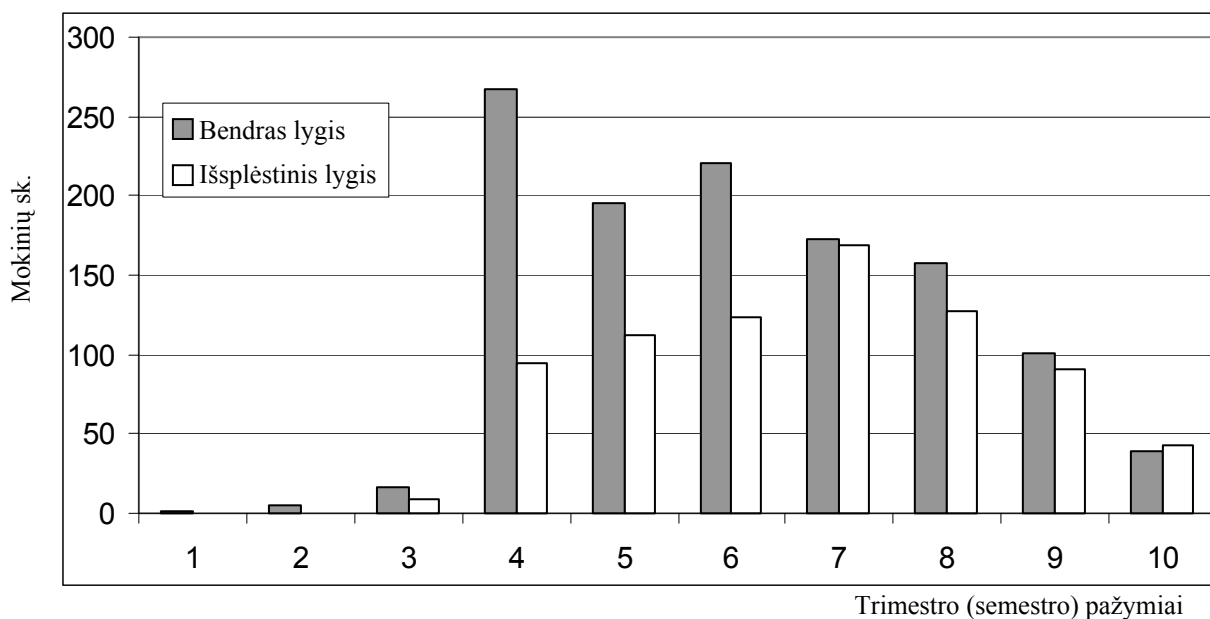
- skaičiai ir skaičiavimai;
- geometrija;
- algebra, funkcijos ir analizės pradmenys;
- statistika, tikimybės, kombinatorika.

Dalis uždavinių, vertinamų daugiau nei vienu tašku, gali būti priskirti kelioms turinio sritims (pvz., 1 taškas geometrijai ir 1 taškas skaičiavimams). Dėl šios priežasties turinio sritys analizėje sugrupuotos ne visiškai taip, kaip pateikta egzamino programoje. Egzamino programoje algebra pridėta prie skaičių ir skaičiavimų srities, o šioje analizėje – prie funkcijų ir analizės pradmenų srities, nes užduoties 6 ir 10 uždaviniai priskirtini ir algebrai, ir funkcijoms.

Rengiant analizę buvo remtasi atsitiktinės atrankos būdu iš mokyklų surinktais mokinių egzamino darbais (500), kurie buvo sukoduoti ir iš naujo įvertinti pagal egzamino vertinimo instrukcijas. Statistiniai įverčiai analizėje pateikti pagal pakartotinio vertinimo rezultatus. Kad būtų lengviau skaityti, skaičiai pateikti suapvalinti iki vienetų.

**BENDRIEJI REZULTATAI**

Ne paslaptis, kad mokyklinį brandos egzaminą renkasi laikyti ne patys gambiausi matematikai mokiniai (žr. 9 diagr.).



**9 diagrama. Mokinių matematikos mokymasis pagal lygius**  
(Bendru lygiu mokėsi virš 13200, o išplėstiniu virš 9900 mokinių)

Statistinės analizės skyrelyje pateiktoje egzamino taškų pasiskirstymo diagramoje matyti (žr. 2 diagr.), kad egzamino užduotis yra sukurta būtent šiems mokiniams – nei per sudėtinga, nei per paprasta. Didžiosios dalies mokinių egzamino rezultatai yra vidutiniai. Kai kurie mokiniai gavo aukščiausius įvertinimus ir tik vos keli egzamino neišlaikė. 7 diagramoje pateikti mokinių rezultatai prieš darbų pakartotinį vertinimą (šie rezultatai tokie, kokie gauti iš mokyklų) ir po pakartotinio vertinimo. Apatinė stulpelinė diagrama rodo vertinimo mokyklose rezultatus, o viršutinė – po pakartotinio vertinimo rezultatus. Kaip matyti, po pakartotinio vertinimo šiek tiek sumažėja staigus šuolis ties egzamino išlaikymo riba. Būtina paminėti, jog pakartotinai buvo vertinti tik atviro atsakymo uždaviniai. Pasirenkamojo atsakymo uždaviniai pakartotinai nevertinti (netikrinta, ar teisingai užskaityti / neužskaityti taškai už pasirinktą atsakymą). 8 diagramoje matyti, keliems mokiniams po pakartotinio vertinimo taškų buvo skirta arba daugiau, arba mažiau ir kiek daugiau arba mažiau. Ties nulio riba nurodytas skaičius mokinių, kuriems įvertinimas nebuvo pakeistas. Kadangi matematikos mokykliniame egzamine buvo galima surinkti iš viso tik 33 taškus, tai toks diagramoje pavaizduotų taškų išsibarstymas į vieną ir į kitą pusę nuo nulio nėra menkas (juk maždaug kas 3 taškai keičiasi egzamino įvertinimo pažymys). Mokyklose parašytų pažymių pasiskirstymą matome 1 diagramoje (pažymiai šiemet geresni nei pernai – vadinasi, egzaminas šiemet buvo paprastesnis). Jei perrašytume pažymius iš naujo, atsižvelgdami į pakartotinį darbų vertinimą, gautume trečdaliu daugiau egzamino neišlaikiusių mokinių, trečdaliu mažiau gavusių keturis, daugiau gavusių septynis, mažiau gavusių šešis, devynis, dešimt.

Įdomu panagrinėti ne tik bendrą egzamino taškų pasiskirstymą, bet ir pasižiūrėti, kaip pasiskirstė taškai atskirai už pasirenkamojo atsakymo ir už atvirojo atsakymo uždavinius (žr. Statistinės analizės 3 ir 4 diagr.). Kaip matyti, pasirenkamojo atsakymo uždavinius mokiniams sekėsi spręsti daug geriau nei atvirojo atsakymo (atkreipkite dėmesį, kad abiejose diagramose vertikalioji ašis – moksleivių skaičius – pateikta ne toje pačioje skalėje: 3 diagramoje viršutinė riba yra 7000 mokinių, 4 diagramoje – 1600 mokinių; taigi taškus už atvirojo atsakymo uždavinius gavo daug mažiau mokinių nei už pasirenkamojo atsakymo uždavinius). Be to, pasirenkamojo atsakymo uždavinių skiriamoji geba yra mažesnė (kartais net neigiama) nei atvirojo atsakymo uždavinių, t. y. uždaviniai su pasirenkamaisiais atsakymais prasčiau atskiria gerai mokančius matematiką nuo blogiau ją mokančių. Mokinių surinkti taškai už tokio tipo uždavinius, palyginus su surinktais taškais už atvirojo atsakymo uždavinius, prastai koreliuoja su mokinio pasiekta viso egzamino taškų suma (žr. 5 ir 6 diagr.). Dėl to, ar yra prasmės pateikti egzaminą, ypač mokyklinio, užduotyje pasirenkamojo atsakymo uždavinių, kyla nemaža diskusijų.



## SKAIČIAI IR SKAIČIAVIMAI

Natūralu, kad skaičiavimo veiksmus reikėjo atlikti visuose uždaviniuose, tačiau grynai skaičiavimo sričiai priskirtini tik du uždaviniai. Vienas jų – pasirenkamojo atsakymo uždavinys, pažymėtas 4 numeriu.

4. Dviejų skirtingų veislių šunų – takso ir aviganio – svorių santykis 2:11. Kiek sveria taksas, jei aviganis sveria 46,2 kg?
- A 2                      B 4,2                      C 7,1                      D 8,4                      E 23,1

### 1 pav. 4 uždavinio sąlyga

Uždavinys sprendžiamas dviem žingsniais: sužinoma, kiek kilogramų atitinka viena santykinė dalis (46,2 : 11), ir gautieji kilogramai padauginami iš 2. Ši VI klasės lygio uždavinį mokiniai įveikė sėkmingai – teisingai išsprendė 87 proc. mokinių. Tai pats lengviausias egzamino uždavinys. Kita vertus, kad net 13 proc. baigiančiųjų mokyklą neįveikia paprasto žemesniųjų klasių lygio ir dar pasirenkamojo atsakymo tipo uždavinio. Peržvelgus klaidingus pasirenkamuosius atsakymus matyti, jog daugiausia mokiniai rinkosi neteisingą atsakymą „4,2“ (7 proc.). Tai rodo, jog mokiniai išsprendė tik pusę uždavinio – rado, kiek kilogramų atitinka viena santykinė dalis, ir toliau nesprendė – užmiršo, ko prašo sąlyga, arba tiesiog jos įdėmiai neperskaitė. 3 proc. mokinių rinkosi atsakymą „23,1“. Jie taip pat atliko tik vieną sprendimo žingsnį, tačiau kurdami atvirkščią santykį.

Kitas skaičių ir skaičiavimų srities uždavinys pažymėtas 7 numeriu.

7. Ruošiant gėrimą, sumaišyta 60 g kakavos ir 30 g pieno miltelių. Kiek procentų kakavos yra mišinyje? Atsakymą suapvalinkite iki dešimtųjų.

(2 taškai)

### 2 pav. 7 uždavinio sąlyga

Vėlgi uždavinys yra žemesniųjų klasių kurso. Abu uždavinio taškus gavo net daugiau nei du trečdaliai mokinių (68 proc.). Taip pat 19 proc. mokinių už šį uždavinį gavo vieną tašką. Pirmasis uždavinio taškas skirtas už teisingai apskaičiuotą kakavos kiekį procentais, antrasis – už teisingą skaičiaus suapvalinimą iki dešimtųjų jo dalių.

Procentai – viena iš svarbiausių matematikos sąvokų. Jau V klasėje mokiniai sprendžia nesudėtingus procentų uždavinius, po to prie šios temos sugrįžtama kiekvienais metais, procentai vartojami gamtos ir socialinių mokslų pamokose. VI klasėje mokiniai ne tik sprendžia nesudėtingus procentų skaičiavimo uždavinius, bet ir sieja procentus su paprastosiomis trupmenomis, mokosi skaičiuoti paprastus procentus atmintinai, supažindinami su atvirkštiniu procentų skaičiavimo uždaviniu. VII ir VIII klasėse procentai taikomi nagrinėjant įvairias šeimos ir bendrosios ekonomikos temas. Taip procentų sąvoka matematikos pamokose nepamirštama iki pat XII klasės. Nuolatinis kartojimas yra veiksmingas – procentus apskaičiuoti moka apie 88 proc. dvyliktokų (tiek jų gavo po 2 ir 1 taškus).

Antrasis uždavinio taškas buvo skiriamas už teisingą suapvalinimą iki dešimtųjų. Iš rezultatų matyti, kad maždaug penktadalis dvyliktokų nesugebėjo šio veiksmo teisingai atlikti (neskaitant tų, kurie už šį uždavinį visai negavo taškų – taigi nemoka apvalinti greičiausiai dar daugiau mokinių). Skaičių apvalinimas – vėlgi nesudėtinga, su žemesnėmis klasėmis sietina tema, tačiau kažkodėl nemaža dalis dvyliktokų jos visgi nemoka.

Dažniausiai mokiniai sprendė šį uždavinį taikydami proporciją (žr. 3 pav.).

Vertinant mokinių darbus pastebėtos kelios tipinės klaidos. Viena jų – mokiniai nemoka teisingai užrašyti periodinės dešimtainės trupmenos, t. y. tik nedaugelis mokinių vartoja periodo ženklą. Kai kurie mokiniai, nežinodami, kaip tiksliai užrašyti periodą, rašo 66,666666 arba 66,666.... Tačiau didžioji dalis tiesiog rašo 66,666“, „66,66 arba net 66,6 (ir paskui kuo „ramiausiai“ suapvalina į 66,7!).

$$\begin{array}{l}
 90g - 100\% \\
 60g - x\% \\
 x = \frac{60 \cdot 100}{90} \approx 66,7\% \\
 \text{Ats.: } \underline{66,7\%}
 \end{array}$$

### 3 pav. 7 uždavinio sprendimo pavyzdys



Kita tipinė klaida – nemoka taisyklingai vartoti ženklų  $=$  ir  $\neq$ . Mokiniai, gaudami apytikslų skaičių, rašo lygybę, gaudami tikslų skaičių rašo „nelygu“. Vienokių ar kitokių ženklų vartojimo klaidų darė maždaug trečdalis dvyliktokų.

Už šias abi klaidas mokytojai vertindami paprastai nemažino taškų. Pasitaikė mokinių, kurie ir procentus teisingai apskaičiavo, ir iki dešimtųjų suapvalino, ir kartu abi nurodytas klaidas padarė (nerašė periodo ir apytikslės lygybės). Taigi už kiekvieną klaidą atėmus po 1 tašką, visą uždavinį išsprendę, mokiniai būtų gavę po 0 taškų. Todėl mokytojai šias klaidas dažniausiai ignoravo.

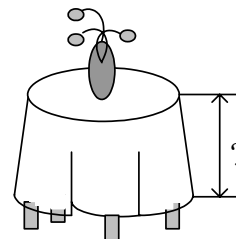
Peržiūrint mokinių darbus pastebėta, kad vertindami tiksliai pagal instrukciją kai kurie mokytojai persi-stengia – jei instrukcijoje nurodyta, jog vienas taškas skiriamas už teisingai apskaičiuotą kakavos kiekį procentais, o antras – už teisingą atsakymą, t. y. suapvalinimą iki dešimtųjų, tai dalis mokytojų tiems mokiniams, kurie apskaičiavo procentus ir iškart juos užrašė suapvalinę iki dešimtųjų, skyrė tik vieną tašką. Tik todėl, kad mokinys neužrašė tarpinio varianto, nors uždavinį visiškai teisingai išsprendė! Šis uždavinys matuoja du dalykus – ar mokama apskaičiuoti procentus ir ar mokama suapvalinti. Todėl ir 2 taškai skirti. Vienas taškas skiriamas tada, kai mokinys, teisingai apskaičiavęs procentus, neteisingai suapvalino arba visai šio veiksmo neatliko. O jeigu mokinys iš karto suapvalino ir užrašė teisingą atsakymą, vadinasi, ir tarpinį rezultatą jis buvo gavęs teisingą. Galbūt taip elgėsi daugiau tie mokytojai, kurie už neteisingą skaičiaus 66,(6) užrašymą kitiems mokiniams vertinimą mažino vienu tašku, tai ir šiems mokiniams, kurie visai neparodė, jog moka dešimtaines periodines trupmenas užrašyti taisyklingai, vertinimas vienu tašku buvo sumažintas. Tačiau jei taškų sumažinimą dėl padarytos klaidos galima pateisinti, tai tikrai negalima pateisinti taškų sumažinimo dėl nepadarytos klaidos (t.y. dėl nuojautos, kad mokinys greičiausiai tą klaidą padarytų).

## GEOMETRIJA

Egzamino užduotyje geometrijos srities uždaviniai buvo 2, vienas jų – struktūruotas. Trumpesnysis uždavinys buvo pažymėtas 9 numeriu.

9. Apskritos staltiesės krašto ilgis 345,4 cm. Apvalaus stalo skersmuo 50 cm. Kiek centimetrų staltiesės kraštai nukabę žemyn nuo stalo paviršiaus? Laikykite, kad  $\pi = 3,14$ .

(2 taškai)



4 pav. 9 uždavinio sąlyga

Pirmasis uždavinio taškas gaunamas pasinaudojus apskritimo ilgio formule ir apskaičiavus staltiesės spindulį, antrasis – iš staltiesės spindulio atėmus stalo spindulį ir gavus teisingą atsakymą. Visiškai uždavinį išsprendė daugiau nei trečdalis mokinių (39 proc.). Vieną tašką gavo dar 10 proc. dvyliktokų. Visai šio uždavinio nesprendė net 18 proc. mokinių! Tai rodo, jog laikantiesiems mokyklinį egzaminą pritaikyti matematinį modelį realaus turinio uždaviniui nėra paprasta.

Džiugu matyti išsamius mokinių sprendimus (žr. 5 pav.).

*Kadangi skersmuo 50cm, tai spindulys 25 (2 taškai)  
 Visas staltiesės spindulys yra  $C = 2\pi R$ , tai  $R = \frac{C}{2\pi} =$   
 $= \frac{345,4}{6,28} = 55$  cm, tai nukabę staltiesės kraštai  
 nuo stalo paviršiaus bus  $55 - 25 = 30$  cm ilgio  
 Ats.: Nukabę kraštai bus 30 cm ilgio*

5 pav. 9 uždavinio sprendimo 1 pavyzdys

Ir netgi su tokiais detaliais brėžiniais (žr. 6 pav.).



$l = 345,4 \text{ cm}$   
 $d = O_1O_3 = 50 \text{ cm} \Rightarrow OO_1 = 25 \text{ cm} = r$   
 $l = \frac{2\pi R}{360^\circ} \cdot \alpha$   
 $345,4 = 2 \cdot 3,14 R$   
 $6,28 R = 345,4$   
 $OO_2 = R = 55 \text{ (cm)}$   
 $O_1O_2 = OO_2 - OO_1 = 55 - 25 = 30 \text{ (cm)}$

Ats.: 30 cm

6 pav. 9 uždavinio sprendimo 2 pavyzdys

Dažniausiai pasitaikiusi klaida – mokiniai nežino, kokią formulę reikėtų taikyti. Įdomiausia tai, jog mokiniai ne tiek painiojo apskritimo ilgio ir skritulio ploto formules (tokių mokinių buvo mažai), kiek bandė taikyti visokias visiškai netinkamas formules. Ypač „populiarios“ buvo ritinio šoninio paviršiaus ploto bei ritinio tūrio formules. Rečiau taikė rutulio paviršiaus ploto ir kitų stereometrinių kūnų plotų ar tūrių formules. Taip pat buvo galima rasti ir netinkamų planimetrijos formulių – pavyzdžiui, stačiakampio ploto. Iš viso įvairias neteisingas formules taikė net 16 proc. dvyliktokų. Logika turbūt aiški – jei egzamino formulių rinkinyje pateiktos formulės, reikia jas kur nors panaudoti, nesvarbu, kad jos konkrečiu atveju visiškai „ne į temą“. Vienas tokių „sprendimų“ pateiktas 7 paveiksle.

Peržiūrint mokinių darbus pastebėta, kad juos vertinę mokytojai kartais elgėsi tiesiog nesuprantamai – neskyrė už uždavinį taškų (arba juos mažino), jei uždavinys buvo išspręstas kitokiu, nei nurodytu vertinimo instrukcijoje, būdu. Nukentė ir tie mokiniai, kurie sprendami kitu būdu negavo teisingo galutinio atsakymo – tuomet ir dalinių taškų mokytojai nebuvo linkę jiems skirti (nes pagal vertinimo instrukciją daliniai taškai turėjo būti skiriami, pvz., už teisingai apskaičiuotą staltiesės spindulį, o mokinys apskaičiavo skersmenį). Tai, kad mokinys uždavinius gali spręsti koku tik nori būdu, o instrukcijose nurodomas tik vienas iš galimų sprendimo būdų, aiškinama vertintojų seminaruose. Ir daliniai taškai tokiu atveju skiriami už teisingai atliktus sprendimo žingsnius.

$S = 2 \pi R H$   
 $S = 345,4$   
 $R = 50 : 2 = 25$   
 $345,4 = 2 \cdot 3,14 \cdot 25 \cdot H$   
 $345,4 = 157 H$   
 $157 H = 345,4 \quad | : 157$   
 $H = 2,2 \text{ cm}$   
 Ats.:  $H = 2,2 \text{ cm}$

7 pav. 9 uždavinio sprendimo 3 pavyzdys

Kitas geometrijos uždavinys egzamino užduotyje buvo pats paskutinis.



13. Andrius pasistatė kubo formos sodo namelį su trimis vienodais langais ir vienomis durimis bei piramidės formos stogu. Namelio sienos ilgis – 3 m, lango matmenys –  $1 \times 1,2$  m, durų –  $2 \times 0,9$  m, stogo aukštis – 2 m. Nusipirko dviejų spalvų dažų namui dažyti ir plokščių stogui dengti.

1. Koks viso namo aukštis?

(1 taškas)

2. Andrius nutarė namelio duris nudažyti iš lauko pusės rudai. Kiek reikės rudų dažų, jei  $1 \text{ m}^2$  nudažyti reikia 350 g dažų?

(2 taškai)

3. Namelio sienas Andrius nusprendė dažyti geltonai. Kiek reikės geltonų dažų, jei  $1 \text{ m}^2$  nudažyti reikia 350 g dažų?

(3 taškai)

4. Visą stogą Andrius norėjo uždengti plokštėmis. Koks yra plokštėmis dengtinas plotas?

(4 taškai)

#### 8 pav. 13 uždavinio sąlyga

Kiekviena uždavinio struktūrinė dalis yra nepriklausoma nuo kitų, t. y. jei mokinys neišsprendė arba neteisingai išsprendė kurią nors vieną dalį, tai netrukdo jam spręsti kitos dalies. Uždavinio dalys išdėstytos sunkėjimo tvarka, kiekviena reikalauja vis daugiau sprendimo žingsnių.

Pirmoji uždavinio dalis – triviali. Norint gauti atsakymą (namelio aukštį) tereikėjo atlikti paprasčiausią veiksmą – sudėti sienos ir stogo aukščius. Iš rezultatų matyti, jog dauguma baigiančiųjų mokyklą tai atlikti sugeba (uždavinio sunkumas – 84 proc.). Tačiau, atmetę tuos, kurie šį uždavinį praleido nespėndę (8 proc.; kadangi uždavinys buvo paskutinis, galbūt kai kuriems mokiniams pritrūko laiko?), pastebime, jog 8 proc. dvyliktokų bandė apskaičiuoti namelio aukštį, tačiau nesėkmingai (pvz., abu duotuosius aukščius ne sudėjo, o sudaugino – žr. 9 pav.).

1.  $3 \text{ m} \cdot 2 \text{ m} = 6 \text{ m} = 600 \text{ cm}$

2.  $1 \text{ m}^2 = 200 * 100 \text{ m}^2 = 200 \text{ m} = 350 \text{ g}$

3.  $350 \text{ g} - 200 \text{ m} = 150 \text{ g} (1 \text{ m}^2)$

4.  $2 \text{ m} \cdot 100 \text{ cm} = 200 \text{ cm} = 20000 \text{ cm}$

Ats.: Namo aukštis  
1. Rudų dažų reikia 600 cm. 2. Rudų dažų durims reikia 150 g ( $1 \text{ m}^2$ )  
3. Geltonų dažų sienoms reikia 150 g ( $1 \text{ m}^2$ ) 4. Plokštėmis dengtinas plotas 20000 cm

#### 9 pav. 13 uždavinio sprendimo 1 pavyzdys

Pasitaikė mokytojų (gerai, kad tokių buvo nedaug), kurie vertindami mokinių darbus už šią uždavinio dalį neskyrė taško, jei mokinys iš karto užrašė atsakymą, neparodydamas, kaip jį gavo. Turbūt tie mokytojai neatkreipė dėmesio į tai, kad vertinimo instrukcijose aprašyta, už ką skiriamas taškas – už teisingą atsakymą (o ne už gautą teisingą atsakymą). Tai reikštų, jog tokiu atveju reikalauti sprendimo nereikėjo (juk sprendimas toks primityvus – tik 3 + 5).

Antra uždavinio dalis – dviejų žingsnių. Pirmiausia reikėjo rasti durų plotą ( $2 \cdot 0,9$ ) ir po to apskaičiuoti, kiek iš viso reikės dažų ( $1,8 \cdot 350$ ). Iš rezultatų matyti, kad tokius veiksmus mokiniai moka atlikti neblogai – abu uždavinio taškus gavo 66 proc. dvyliktokų. Dar 8 proc. mokinių mokėjo apskaičiuoti tik durų plotą. Visai šios uždavinio dalies nespėndė 11 proc. egzaminą laikiusiųjų. 15 proc. mokinių vienaip ar kitaip bandė spręsti, tačiau nesėkmingai.

Trečia uždavinio dalis – trijų žingsnių. Pirmiausia reikėjo apskaičiuoti visą sienų plotą ( $3 \cdot 3 \cdot 4$ ), po to dažomą plotą ( $36 - 1,8 - 3 \cdot 1,2$ ) ir paskiausiai rasti, kiek reikės dažų ( $30,6 \cdot 350$ ). Atsakymą mokiniai galėjo pateikti tiek gramais, tiek kilogramais. Iki galo uždavinį teisingai atliko tik trečdalis mokinių. Dar 4 proc. dvyliktokų sugebėjo apskaičiuoti dažomą plotą, 12 proc. – tik sienų plotą. Nespėndė uždavinio 16 proc. abiturientų. Daugiau nei trečdalis mokinių (35 proc.) bandė spręsti, bet nė vieno žingsnio neapskaičiavo teisingai.



Ketvirtoji dalis – pati sudėtingiausia, reikalavusi daugiau sprendimo žingsnių. Vienas iš sprendimo būdų galėjo būti toks, kaip ir vertinimo instrukcijoje (žr. 10 pav.).

Nr.	Sprendimas	Taškai	Paiškinimai
13		10	
4		4	
	Piramidės šoninės sienos aukštinė ( $h$ ) randama iš stačiojo trikampio, kurio statiniai lygūs 2 m (stogo aukštis) ir $3 : 2 = 1,5$ m (pusė sienos ilgio). Pagal Pitagoro teorema $h = \sqrt{2^2 + 1,5^2} = 2,5 \text{ (m).}$ Dengiamas stogo plotas lygus piramidės šoniniam paviršiui: $S = 4 \cdot \frac{2,5 \cdot 3}{2} = 15 \text{ (m}^2\text{).}$ Ats.: $15 \text{ m}^2$ .		<ul style="list-style-type: none"> <li>Už teisingo būdo piramidės šoninės sienos aukštinei rasti pasirinkimą.</li> <li>Už teisingai apskaičiuotą piramidės šoninės sienos aukštinę.</li> <li>Už teisingo reiškinio piramidės šoniniam paviršiui skaičiuoti sudarymą.</li> <li>Už gautą teisingą atsakymą.</li> </ul>

**10 pav. 13.4 uždavinio vertinimo instrukcija**

Mokiniam 13.4 uždavinys buvo pats sudėtingiausias. Jo sunkumas – 16 proc. Tačiau 11 proc. mokinių, kurie suprato, kaip jį spręsti, surinko visus 4 taškus. Tokių, kurie sprenddami darė klaidų arba išsprendė ne iki galo ir gavo 1, 2 arba 3 taškus, buvo po kelis procentus. 41 proc. mokinių, nors ir bandė spręsti, tačiau nepajėgė gauti jokio teisingo tarpinio atsakymo, už kurį būtų galima skirti taškų. Net 38 proc. mokinių šios uždavinio dalies išvis nesprendė.

11 pav. pateikiame 13 uždavinio sprendimą.

$2m + 3m = 5m$   
 $1m^2 - 350g$   
 $1,8m^2 - xg$   
 $x_{60} = 630g$   
 $1m^2 - 350g$   
 $30,6m^2 - xg$   
 $x_{60} = 10710g$   
 $S_{\text{storo}} = 9m^2 \cdot 4 = 36m^2$   
 $S_L = 1,2 \cdot 3 = 3,6m^2$   
 $S_D = 1,8m^2$   
 $S_{\text{storo}} - (S_L + S_D) = 36m^2 - 5,4m^2 = 30,6m^2$   
 $c = \sqrt{2^2 + 1,5^2} = \sqrt{4 + 2,25} = \sqrt{6,25} = 2,5m \quad c = h$   
 $S_{\Delta} = \frac{1}{2} ah = 0,5 \cdot 1,5 \cdot 2,5 = 1,875m^2$   
 $S_{\Delta} = 5 \cdot 2 = 3,75m^2$   
 $S_{\text{storo}} = S_{\Delta} \cdot 4 = 15m^2$   
 Ats.: 1)  $5m$  2)  $630g$  3)  $10710g$  4)  $15m^2$

**11 pav. 13 uždavinio sprendimo 2 pavyzdys**

Labai daug mokinių, sprenddami šį stereometrijos uždavinį, visai nebraižė brėžinio. Jei sprendžiant pirmąsias uždavinio dalis buvo galima išsiversti ir be brėžinio, tai ketvirtajai daliai brėžinys, atrodytų, tiesiog būtinas. Tačiau labai daug mokinių to nė nebandė daryti (kai kurie brėžinį nusibraižė tik juodraštyje). Ar mokiniai nemoka braižyti



stereometrinių kūnų (keistų brėžinių tikrai pasitaikė), ar tiesiog nesusipranta to padaryti, jei uždavinio sąlygoje nubraižyti brėžinio neprašoma? Brėžinių braižymui ir suvokimui, jog brėžinys paprastai yra reikalingas sprendžiant geometrijos uždavinį, mokymo procese reikia skirti daugiau dėmesio.

Kita pastebėta problema – dalis mokinių visai nemoka operuoti matavimo vienetais: iš gramų atima metrus ir vėl gauna gramus; metrus daugina iš centimetrų ir gauna centimetrus; apskaičiuodami plotą rašo ne kvadratinis vienetus (dažniausiai taip daro mergaitės!) ir pan. (žr. 9 pav.).

Dar viena problema yra ta, jog mokiniai kartais pamiršta, ką skaičiuoja. Pavyzdžiui, sudėdami sienos ir stogo aukščius bando apskaičiuoti namelio aukštį (13.1 dalis), tačiau atsakyme rašo, kad gavo lango (?) aukštį.

Kaip ir kitų, taip ir šio uždavinio pasitaikė ir labai „originalių“ sprendimo būdų: ieškant stogo paviršiaus ploto (13.4 dalis) buvo mėginta naudotis piramidės tūrio formule (patogu – tik vienas veiksmas, be to, ir formulė pateikta egzamino užduotyje); apskaičiuojant, kiek reikės dažų sienoms dažyti (13.3 dalis), buvo taikyta kūgio šoninio paviršiaus ploto formulė  $S = \pi RL$ , laikyta, kad  $L$  – dažų kiekis, reikalingas  $1 \text{ m}^2$  nudažyti (t. y. 360 g). Vėlgi patogu – tik viena formulė, o „apskaičiuoja“ iškart ir sienų plotą, ir dažų kiekį.

Peržiūrint šio uždavinio vertinimą pastebėta tam tikrų nesklandumų, jei mokinio buvo spęsta koku nors kitu, nei nurodyta instrukcijose, būdu. Kartais sunku pripainiotuose mokinių sprendimuose išvelgti „racionalų grūdą“, už kurį būtų galima skirti dalį taškų. Kaip matyti, ne visi mokytojai ir stengiasi tuos teisingus elementus surasti, ypač kai galutinis uždavinio atsakymas yra neteisingas.

## ALGEBRA, FUNKCIJOS IR ANALIZĖS PRADMENYS

Tai tradicinė matematikos mokymo sritis. Mokytojai pakankamai įgiję patirties ją dėstydami, o mokymo priemonėse yra daug įvairiausių uždavinių. Matematikos mokyklinio egzamino šios srities reikalavimai nuo 2003-2004 mokslo metų yra labai pasikeitę: atsisakyta daugelio anksčiau nagrinėtų temų (sekų, progresijų), išvestinės taikomos tik daugianariais apibrėžtoms funkcijoms tirti, o daugumoje temų keliami reikalavimai spęsti paprasčiausius arba paprastus uždavinius. Kita problema – pasikeitė matematikos programa, o mokymo priemonių atitinkančių šią programą, nėra, pamokų skaičius sumažintas iki penkių savaitinių valandų per dvejus metus (vienuoliktai ir dvyliktai klasei). Dauguma laikusiųjų mokyklinį egzaminą mokinių mokėsi išplėstinį matematikos kursą, kuris labiau akademiškas, sprendžiami uždaviniai daug sudėtingesni. Mokyklinio egzamino užduotyje algebros, funkcijų ir analizės pradmenų uždaviniai yra tradicinių formuluočių ir gerokai paprastesni už tuos, kuriuos mokiniai atlikdavo per pamokas. Matyt, todėl beveik visi laikiusieji egzaminą bandė šiuos uždavinius spęsti.

Kaip įprasta, geriausiai mokiniai sprendė uždavinius su pasirenkamaisiais atsakymais.

Aptarkime konkrečius uždavinius.

$$1. 2^{n+2004} + 2^{n+2004} =$$

A  $2^{n+2005}$       B  $2^{2n+4008}$       C  $4^{2n+4008}$       D  $4^{n+2005}$       E  $4^{n+2004}$

### 12 pav. 1 uždavinio sąlyga

Teisingą atsakymą A rinkosi tik 37 proc. egzaminą laikusių mokinių. Maždaug kas penktas rinkosi klaidingus atsakymus B, C, E. Matyti, kad abiturientai nemoka pristinti paprasčiausių reiškinių su laipsniais.

2. Išvykęs į kelionę automobiliu, Andrius važiavo 3 valandas 70 km/h greičiu, o kitas 2 valandas 90 km/h greičiu. Jo vidutinis greitis:

A 70 km/h      B 78 km/h      C 80 km/h      D 82 km/h      E 90 km/h

### 13 pav. 2 uždavinio sąlyga

Smagu pastebėti, kad automobilio vidutinį greitį moka teisingai apskaičiuoti 75 proc. abiturientų. Tačiau neramu, kad net 20 proc. rinkosi atsakymą C. Tai nėra atsitiktinumas, bet labai aiškus nesupratimas, kaip skaičiuojamas vidutinis greitis. Šiuo atveju mokiniai nustatė tik dviejų greičių vidurkį – gana dažnai pasitaikanti klaida. Kitus atsakymus rinkosi labai mažai mokinių, matyt, tie, kurie nespėdė, o tik spėliojo.





3. Išsprendę lygtį  $\log_2(5x - x^2) = 2$ , gausime:

A 5

B 0; 5

C 1; 4

D  $\frac{5 + \sqrt{17}}{2}; \frac{5 - \sqrt{17}}{2}$

E  $\frac{5 + \sqrt{21}}{2}; \frac{5 - \sqrt{21}}{2}$

#### 14 pav. 3 uždavinio sąlyga

Logaritminių lygčių sprendimas yra vidurinės mokyklos baigiamųjų klasių tema. Gal mokiniai nespėjo pamiršti ir todėl rezultatai pakankamai geri, net 74 proc. mokinių rinkosi teisingą atsakymą C. 9 proc. mokinių rinkosi neteisingą atsakymą D – nepertvarkė logaritminės lygties į kvadratinę, o tiesiog „numetė“ logaritmo ženklą ir išsprendė kvadratinę lygtį  $5x^2 - x = 2$ . Panašiai elgėsi ir tie 7 proc. mokinių, kurie rinkosi atsakymą B – jie tiesiog sprendė lygtį  $5x^2 - x = 0$ .

Matome, kad uždavinius su pasirenkamaisiais atsakymais mokiniai sprendė gana sėkmingai, tačiau kitus uždavinius gerokai prasčiau, nes nemokėjo argumentuoti ir užrašyti sprendimų. Tokius uždavinius ir paanalizuosime.

6. Išspręskite lygčių sistemą 
$$\begin{cases} x + y = 3(x - y), \\ (x - y)(x + y) = 3. \end{cases}$$

(4 taškai)

#### 15 pav. 6 uždavinio sąlyga

Uždavinys buvo vertinamas remiantis tokia vertinimo instrukcija.

Nr.	Sprendimas	Taškai	Paiškinimai
6	$\begin{cases} x + y = 3(x - y), \\ (x - y)(x + y) = 3. \end{cases}$ <p>Iš pirmos lygties išreiškiame <math>x</math>:</p> $x + y = 3x - 3y,$ $x = 2y.$ <p>Pertvarkome antrą lygtį:</p> $x^2 - y^2 = 3,$ $4y^2 - y^2 = 3,$ $y^2 = 1, \quad y_{1,2} = \pm 1;$ $x_{1,2} = \pm 2.$ <p>Ats.: (2; 1); (-2; -1).</p>	4	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 1 Už teisingą vieno kintamojo išreiškimą kitu kintamuoju.</li> <li>• 1 Už teisingai pertvarkytą sistemą į lygtį su vienu kintamuoju.</li> <li>• 2 Po tašką už kiekvieną gautą sprendinių porą.</li> </ul>

#### 16 pav. 6 uždavinio vertinimo instrukcija

Teisingai išspręstų uždavinių pavyzdžiai (žr. 17 ir 20 pav.).



$$\begin{cases} x+y=3x-3y \\ x^2-y^2=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=2y \\ x^2-y^2=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=2y \\ 3y^2=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=1 \\ x=2 \end{cases} \quad \begin{cases} y=-1 \\ x=-2 \end{cases}$$

17 pav. 6 uždavinio sprendimo 1 pavyzdys

$$\begin{cases} x-y = x+y \\ \frac{x+y}{3} (x+y) = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+y)^2 = 9 \\ x+y = 3 \\ x+y = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y = 3 \\ x-y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y = -3 \\ x-y = -1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2x &= 4 & 2x &= -4 \\ x &= 2 & x &= -2 \\ y_1 &= 1 & y_2 &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -2+y &= -3 \\ y &= -1 \\ 2+y &= 3 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

Ats.:  $(-2; -1), (2; 1)$

18 pav. 6 uždavinio sprendimo 2 pavyzdys

Tai gana paprasta pagrindinės mokyklos kurso lygčių sistema, kurios 11 proc. mokinių visai nespėdė, o gerai išspėdė tik kas penktas mokinytis. Nulį taškų už šį uždavinį gavo net 44 proc. mokinių. Dažniausiai pasitaikiusios klaidos – mokiniai nemoka sistemos pertvarkyti į lygtį su vienu kintamuoju. Jei tai pavyksta padaryti, tuomet suradę vieną kintamąjį sustoja pamiršę, kad spėdė lygčių sistemą, ir neapskaičiuoja antrojo. Dalis mokinių klydo spėdami kvadratinę lygtį ( $y^2 = 1$ ), gavo tik sprendinį  $y = 1$ . Pasitaikė abiturientų, teisingai išspėdusių lygčių sistemą, tačiau nemokėjusių parašyti atsakymo skaičių poromis. Panagrinėjus darbus, parodytus 19 ir 20 pav., kyla abejonės, ar tai tikrai dvyliktokų darbai. Tokių darbų autoriai neturėtų mokyti vidurinės mokyklos baigiamosiose klasėse, juo labiau laikyti matematikos egzamino.

$$\begin{aligned} x+y &= 3(x-y) \\ x+y &= -3(x-y) = 0 \\ -3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x-y)(x+y) - 3 &= 0 \\ -3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} -3 = 0 \\ -3 = 0 \end{cases}$$

Ats.:  $-3=0, -3=0$

19 pav. 6 uždavinio sprendimo 3 pavyzdys



$$\begin{cases} (x+y) = 3(x-y) \\ (x-y)(x+y) = 3 \end{cases}$$

$$2x = 3 \cdot 2x = 3$$

$$2x - 6x = 3$$

$$-4x = 3$$

$$x = -\frac{3}{4}$$

Ats.:  $x = -\frac{3}{4}$

20 pav. 6 uždavinio sprendimo 4 pavyzdys

8. Kad verslas būtų pelningas, pajamos  $R$ , gautos realizavus prekes, turi būti didesnės už sąnaudas  $C$  joms pagaminti, t. y.  $R > C$ . Gamybos sąnaudos per savaitę apskaičiuojamos pagal formulę  $C = 300 + 1,5x$ , o pajamos, gautos realizavus prekes, pagal formulę  $R = 2x$ ; čia  $x$  yra parduotų per savaitę prekių kiekis. Kiek prekių reikia parduoti per savaitę, kad gautos pajamos būtų didesnės už sąnaudas?

(2 taškai)

21 pav. 8 uždavinio sąlyga

Uždavinys buvo vertinamas remiantis tokia vertinimo instrukcija.

Nr.	Sprendimas	Taškai	Paiškinimai
8		2	
	$2x > 300 + 1,5x$ , $x > 600$ . Ats.: daugiau negu 600.	• 1	Už teisingą nelygybės sudarymą. Už gautą teisingą atsakymą.

22 pav. 8 uždavinio vertinimo instrukcija

Tai realaus turinio vidutinio sunkumo uždavinys, kurio išvis nespėdė 11 proc. mokinių, o 27 proc. buvo įvertinti nuliu tašku. Gerai šį uždavinį išspėdė šiek tiek daugiau nei pusė mokinių, nors uždavinys yra pagrindinės mokyklos kurso (žr. 23 pav.).

$$R > C$$

$$2x > 300 + 1,5x$$

$$0,5x > 300$$

$$x > 600$$

Ats.: Daugiau nei 600

23 pav. 8 uždavinio sprendimo 1 pavyzdys



Dažniausiai pasitaikiusi klaida – mokiniai sudaro ne nelygybę, o lygtį ir teisingai ją išsprendę neatsako į uždavinio klausimą.

Pateikiame šio uždavinio sprendimo pavyzdį (žr. 24 pav.), kuriame atsispindi „puikus“ abituriento matematikos išmanymas.

$$\begin{aligned}
 2x &> 300 + 1,5x \\
 2x &> 301,5x = 0 \\
 301,5x &= 2 \\
 x &= 150,75 \\
 \text{Ats.: } &\underline{151 \text{ pueks}}
 \end{aligned}$$

24 pav. 8 uždavinio sprendimo 2 pavyzdys

10. Išspręskite lygtį  $2 \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$ .

(3 taškai)

25 pav. 10 uždavinio sąlyga

Uždavinys buvo vertinamas remiantis tokia vertinimo instrukcija.

Nr.	Sprendimas	Taškai	Paaiškinimai
10	$\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2},$ $2x - \frac{\pi}{4} = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z;$ $x_1 = \frac{5\pi}{24} + \pi n, n \in Z;$ $x_2 = \frac{\pi}{24} + \pi n, n \in Z;$ $\text{Ats.: } \frac{5\pi}{24} + \pi n, \frac{\pi}{24} + \pi n, n \in Z.$	3	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 1 Už teisingai pritaikytą formulę.</li> <li>• 2 Po tašką už kiekvieną gautą teisingą atsakymą.</li> </ul>

**Pastaba.** Jeigu mokinys nė karto nenurodo, jog  $n \in Z$ , vertinimas mažinamas 1 tašku.

26 pav. 10 uždavinio vertinimo instrukcija

Uždavinys tradicinis, daug analogiškų uždavinių yra vadovėliuose ir kitose mokymo priemonėse. Tai tikrai standartinio sprendimo uždavinys, reikalinga formulė buvo užduočių sąsiuvinyje, reikėjo tik gebėti ją pritaikyti, tačiau net 35 proc. mokinių šio uždavinio visai nespėdė. Šis uždavinys buvo labai sunkus Lietuvos abiturientams, pasirinkusiems mokyklinį egzaminą – tik 15 proc. jį išsprendė teisingai. Pateikiamas gerai išspręsto uždavinio pavyzdys (žr. 27 pav.).



$$\begin{aligned} \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 2x - \frac{\pi}{4} &= \pm \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi k \quad ; k \in \mathbb{Z} \\ 2x - \frac{\pi}{4} &= \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k \quad ; k \in \mathbb{Z} \\ 2x_1 &= \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} + 2\pi k \quad ; k \in \mathbb{Z} \\ 2x_1 &= \frac{5\pi}{12} + 2\pi k \quad /:2 \quad ; k \in \mathbb{Z} \\ x_1 &= \frac{5\pi}{24} + \pi k \quad ; k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$2x_2 = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} + 2\pi k \quad ; k \in \mathbb{Z}$$

$$2x_2 = \frac{\pi}{12} + 2\pi k \quad /:2 \quad ; k \in \mathbb{Z}$$

$$x_2 = \frac{\pi}{24} + \pi k$$

$$\text{Ats.: } x_1 = \frac{5\pi}{24} + \pi k \quad ; \quad x_2 = \frac{\pi}{24} + \pi k \quad ; k \in \mathbb{Z}$$

27 pav. 10 uždavinio sprendimo 1 pavyzdys

Net 40 proc. bandžiusiųjų spręsti buvo įvertinti nulių taškų, o 23 proc. sugebėjo tik pritaikyti formulę, tačiau nemokėjo sudėti ir atimti paprastųjų trupmenų, todėl buvo įvertinti 1 tašku. Dažnai pasitaikiusi klaida – mokiniai nerašė periodo. Labai daug buvo darbų, kuriuose sprenddami šį uždavinį mokiniai praleidinėjo argumentą. Vėliau argumentas lyg iš niekur nieko vėl atsiranda. Pasitaikė ir visiško nesupratimo atvejų, kai mokiniai, bandydami išsisukti iš situacijos, pertvarkydavo uždavinio sąlygą taip, kad mokėtų jį išspręsti (žr. 28 pav.).

$$\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 2x =$$

$$\cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2x = 60^\circ$$

$$x = 30^\circ$$

$$\text{Ats.: } \underline{30^\circ}$$

28 pav. 10 uždavinio sprendimo 2 pavyzdys

12. Apskaičiuokite  $f'(-1)$ , kai  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x - \sqrt{2}$ .

(2 taškai)

29 pav. 12 uždavinio sąlyga



Uždavinys buvo vertinamas remiantis tokia vertinimo instrukcija.

Nr.	Sprendimas	Taškai	Paiškinimai
12		2	
	$f'(x) = x^2 + x + 1,$ $f'(-1) = 1.$ Ats.: 1.	<ul style="list-style-type: none"><li>• 1</li><li>• 1</li></ul>	Už teisingai apskaičiuotą išvestinę. Už teisingą atsakymą.

30 pav. 12 uždavinio vertinimo instrukcija

Tai vidutinio sunkumo funkcijų tematikos, nagrinėjamos dvyliktoje klasėje, uždavinys. Gal todėl, kad tema nepamiršta, dauguma mokinių bandė šį uždavinį spręsti (tik 11 proc. mokinių nespėdė priešpaskutinio užduoties uždavinio). 48 proc. mokinių gavo maksimalų vertinimą – 2 taškus (žr. 31 pav.).

Handwritten student solution for problem 12. The student has written the derivative of a cubic function:  $f'(x) = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 + \frac{1}{2} \cdot 2x + 1$ . They then simplified it to  $f'(x) = x^2 + x + 1$ . Next, they calculated the derivative at  $x = -1$ :  $f'(-1) = (-1)^2 + (-1) + 1 = 1$ . Finally, they wrote the answer: "Ats.: 1".

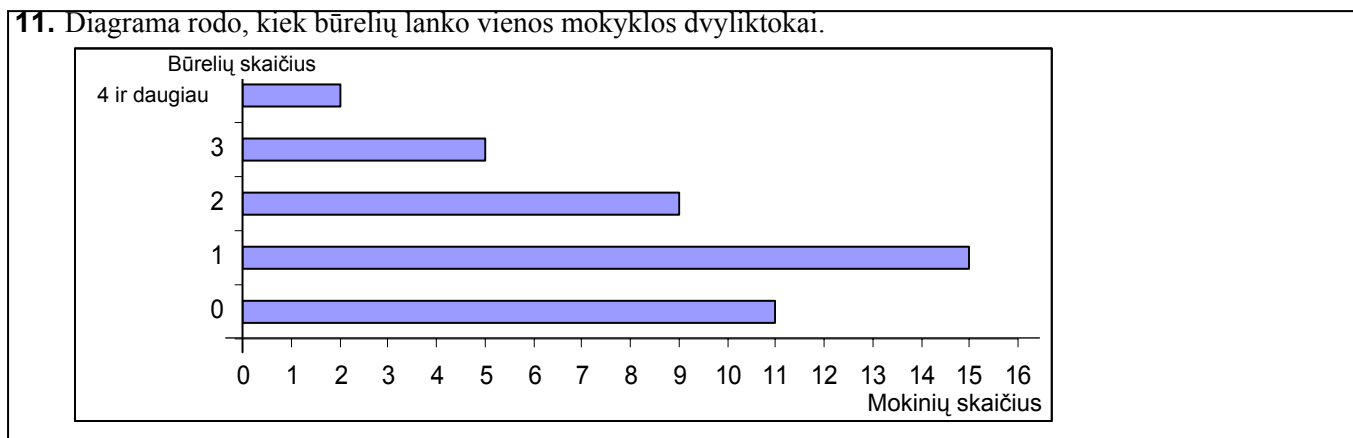
31 pav. 12 uždavinio sprendimo pavyzdys

6 proc. mokinių, teisingai radę išvestinę, nemokėjo ar pamiršo apskaičiuoti išvestinės reikšmę taške „-1“, todėl buvo įvertinti 1 tašku. Net 35 proc. sprendusiųjų nesugebėjo teisingai surasti funkcijos išvestinės ir buvo įvertinti 0 taškų.

Peržvelgę algebros, funkcijų ir analizės pradžmų uždavinius, matome, kad mokiniai nemoka užrašyti uždavinių sprendimų, dažnai spėlioja atsakymus, kur jų nėra, tiesiog nespėdžia. Susidaro įspūdis, kad matematikos pamokų metu nekreipiama dėmesio į tvarkingą uždavinio sprendimo užrašymą. Galbūt rengiant savarankiškus ir kontrolinius darbus pernelyg piktnaudžiaujama užduotimis su pasirenkamaisiais atsakymais ir taip nesuformuojami įgūdžiai argumentuoti, pagrįsti uždavinio sprendimą.

## KOMBINATORIKA, TIKIMYBĖS IR STATISTIKA

Panagrinėkime egzamino užduoties 11-tąjį uždavinį iš statistikos srities.





- |  |            |
|--|------------|
| 1. Kiek dvyliktokų mokosi šioje mokykloje?           | (1 taškas) |
| 2. Kiek būrelių dažniausiai lanko dvyliktokai?       | (1 taškas) |
| 3. Kiek dvyliktokų lanko ne mažiau kaip du būrelius? | (1 taškas) |

### 32 pav. 11 uždavinio sąlyga

Uždavinys labai paprastas. Su stulpelinėmis diagramomis mokiniai yra gerai susipažinę. Kad diagrama pateikta ne vertikali, o horizontali, taip pat nėra naujiena ir dvyliktokams neturėtų būti problema. Nenuostabu, kad beveik visi mokiniai šį uždavinį sprendė. Kiekvieną dalį teisingai atsakė atitinkamai 83, 85 ir 72 proc. abiturientų. Tai geri rezultatai. Tačiau net 17 proc. mokyklą lankiusių 12 metų nesugeba nustatyti, ties kokiais skaičiais baigiasi diagramos stulpeliai ir tuos skaičius sudėti (11.1 dalis; kai kurie nutarė, jog visas uždavinyje aprašytos mokyklos mokinių skaičius randamas pažiūrėjus į ilgiausią stulpelį, t. y. 15!), 15 proc. net nepajėgia nustatyti, kuris diagramos stulpelis yra ilgiausias (!) (11.2 dalis), net 28 proc. neskiria sąvokų „ne mažiau“, „mažiau“ ir pan. (11.3 dalis; nors sąlygoje klausiama, kiek dvyliktokų lanko ne mažiau kaip du būrelius, dalis mokinių tai suprato kaip „daugiau“, „mažiau“ arba net „lygu“). Pastaroji klaida galėtų rodyti ir tai, kad mokiniai neatidžiai skaito sąlygą.

### SKYRELIS PAMĄSTYMI

Peržiūrėjus mokinių darbus tenka pažymėti, kad mokytojams nėra paprasta juos objektyviai įvertinti. Viena iš priežasčių yra ta, kad laikyti mokyklinio egzamino ateina ne patys gabiausieji abiturientai. Susigaudyti jų nenuosekliuose sprendimuose, atrinkti prasmingus veiksmus „originaliuose“ išvedžiojimuose kartais be galo sunku, ypač kai nenorima visiškai „nurašyti“ ir taip vos „šilto“ darbo. Dažnai mokytojai turi itin atidžiai ieškoti prasmingų mokinio sprendimo elementų arba atvirksčiai, užsimerkti, kad nematytų nelogiškumą, nenuoseklumą ir galėtų parašyti nors patį žemiausią pažymį patiems silpniausiems.

Kartais sunku suprasti, ar mokinys išvis nemoka, ar tyčia bando palikti patiems mokytojams „išsirinkti“ teisingą atsakymą (žr. 33 pav.).

1. Dvyliktokų mokosi 136 šioje mokykloje.  
 2. Lanko 6 u daugiau, bet dažniausiai lanko visus būrelius bet dažniausia mokinių lanko 1 būrelį.  
 3. 3-16 de mažiau kaip du būrelius lanko 117 mokinių.  
 Ats.: (1) 136 mokinių (2) 6 u daugiau (3) 117 mokinių.

33 pav. 11 uždavinio „sprendimas“

Tai, kad mokinių atsakymai, užrašyti prie sprendimo ir atsakymo vietoje, nesutampa, nėra retas dalykas. Kaip ir nėra reta tai, jog mokiniai palieka po kelis skirtingus sprendimus (kartu kelis skirtingus atsakymus), iš kurių tik vienas teisingas, tačiau nė vienas nėra nubrauktas. Vėlgį mokytojams lieka apsispręsti, ar būti „geriems“ ir tą teisingąjį sprendimą užskaityti, ar būti „blogiems“ ir vertinti griežtai – juk iš tiesų tai nėra aišku, kokį atsakymą mokinys laikė teisingu, jei paliko du ar dar daugiau skirtingų atsakymų.

Kitas pastebėtas įdomus dalykas – kai kurių mokinių visi arba dauguma neteisingų sprendimų ir atsakymų pataisyti į teisingus. Galbūt egzamino metu mokinys staiga „suprato“, jog visus arba dauguma uždavinių išsprendė neteisingai? O supratęs dar galėjo viską teisingai perspręsti arba sužymėti kitus atsakymus (žr. 34 pav.), beje, dažniausiai kitos spalvos rašikliu ir pasikeitusia rašysena.



Kiekvienas teisingai išspręstas uždavinys (1–5) vertinamas 1 tašku.

1.  $2^{n+2004} + 2^{n+2004} =$

- A  $2^{n+2005}$     B  $2^{2n+4008}$      C  $4^{2n+4008}$     D  $4^{n+2005}$     E  $4^{n+2004}$

2. Išvykęs į kelionę automobiliu, Andrius važiavo 3 valandas 70 km/h greičiu, o kitas 2 valandas 90 km/h greičiu. Jo vidutinis greitis<sup>1</sup>:

- A 70 km/h     B 78 km/h     C 80 km/h    D 82 km/h    E 90 km/h

3. Išsprendę lygtį  $\log_2(5x - x^2) = 2$ , gausime:

- A 5    B 0; 5     C 1; 4  
 D  $\frac{5+\sqrt{17}}{2}; \frac{5-\sqrt{17}}{2}$     E  $\frac{5+\sqrt{21}}{2}; \frac{5-\sqrt{21}}{2}$

4. Dviejų skirtingų veislių šunų – takso ir aviganio – svorių santykis 2:11. Kiek sveria taksas, jei aviganis sveria 46,2 kg?

- A 2     B 4,2    C 7,1     D 8,4    E 23,1

34 pav. Netikėtas „apšvietimas“

Kartais mokinių darbuose randamos tokios keistos klaidos, kurias padarė tik 2 mokiniai iš 500 ir abu jie iš tos pačios mokyklos (žr. 35 ir 36 pav.).

$$\begin{aligned} 2 \cos(2x - \frac{\pi}{4}) &= \sqrt{3} \\ 2 \cos(2x - \frac{\pi}{4}) &= \sqrt{3} \\ \cos(2x - \frac{\pi}{4}) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 2x - \frac{\pi}{4} &= \pm \frac{\pi}{6} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z} \\ 2x &= \pm \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z} \\ x &= \pm \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{8} + n\pi, n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

35 pav. 10 uždavinio „sprendimas“

$$\begin{aligned} 2 \cos(2x - \frac{\pi}{4}) &= \sqrt{3} \\ \cos(2x - \frac{\pi}{4}) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 2x - \frac{\pi}{4} &= \pm \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z} \\ 2x - \frac{\pi}{4} &= \pm \frac{\pi}{6} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z} \\ 2x &= \pm \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z} \\ x &= \pm \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{8} + n\pi, n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

36 pav. 10 uždavinio „sprendimas“

Paveikslėlyje kairėje matome ypatingus nuoseklumo „šedevrus“: paskutinėse trijose eilutėse  $nm$  (!) tampa  $2nm$ , po to padalijus iš 2 tampa  $\pi n$ . Atitinkamai, iš pradžių  $n \in \mathbb{Z}$ , paskui jau apibrėžimo sritis nurodoma ne tik „ $n$ “, bet ir  $nm$ , tik jau priklauso  $\mathbb{Z}$ . Originalu? Ne. Kitas mokinyvis sugalvojo visai panašiai (paveikslėlis dešinėje).

10 uždavinys berods buvo pats tinkamiausias pasireikšti įvairiems mokinių sugebėjimams (žr. 37 pav.).





$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2x - \frac{\pi}{4} = \pm \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$2x - \frac{\pi}{4} = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$2x = \pm \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pm \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{8} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x_1 = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{8} + \pi n = \frac{5\pi}{24} + \pi n, x_2 = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{8} + \pi n = \frac{\pi}{24} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Ats.:  $x = -\frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{8} + \pi n = \frac{\pi}{24} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

37 pav. 10 uždavinio „sprendimas“

Iš pirmo žvilgsnio gali pasirodyti, jog viskas čia gerai – juk teisingi abu gauti atsakymai. Tačiau atidžiau peržiūrėjus visą sprendimą matyti, kad trečioje ir ketvirtoje eilutėse visai dingsta lygybės ženklas, nors sprendžiama lygtis. Trečia ir ketvirta eilutės skiriasi tik skaičiaus  $\frac{\pi}{4}$  ženklu. Iš kur tai, jei visai nėra lygybės ženklo? Penktoje eilutėje reiškiny s vėl tampa lygtimi. Įdomūs gauti atsakymai – vienas žymimas  $x_1$ , o kitas kažkodėl  $x^2$  (ar  $x^a$ ?). Prie atsakymo vietos parašytas tik vienas iš gautųjų atsakymų  $x^2$  ( $x^a$ ). Ir netgi ne pats atsakymas, o perrašyti visi veiksmai. Paaiškinti tokį užrašą nesunku – žmogus žino, kad atsakymas yra tai, ką gauname pabaigoje, tad paskutinį reiškinių prie atsakymo ir užrašė. Kadangi pats gerai nežinojo, ką rašo, tai nesiėmė rizikuoti suklysti ir kartu perrašė visus veiksmus.

Atsakymai, užrašyti ne su indeksais, o su laipsniais, – ne naujiena, taip pat ir simbolių (+, -, = ir pan.) praleidinėjimas / vėl atsiradimas. Taip pat painiojami ir keitinėjami panašūs skaičiai, raidės (2, Z, a arba 2, π, r, n, m, u, arba 1, 7 ir pan.). Tokios klaidos atsiranda perrašinėjant – tarkim iš juodraščio į švarraštį (beje, daugelio mokinių juodraščiai taip ir liko visiškai arba beveik nepanaudoti – tiesiog nuostabus sugebėjimas spręsti atmintinai, ypač pasirenkamojo atsakymo uždavinius). Štai vienas tų pavyzdžių, kai mokinio darbe ten, kur turėtų būti skaitmuo 1, užrašytas skaitmuo 7, nors skaičiuota taip, tarsi būtų 1 (juodraštyje šio sprendimo nėra).

$$1) 3 + 2 = 5(m)$$

$$2) 2 \cdot 0,8 = 1,6 (m) \quad 1,6 \cdot 350 = 650(g)$$

$$3) 3 \cdot 30 = 90(m^2) \quad 9 \cdot 4 = 36(m^2)$$

$$36 - 3,6 = 32,4$$

$$32,4 \cdot 350 = 11340(kr)$$

$$4) 2,5m \cdot 8m = 20m^2 \quad 2) S_{\Delta} = \frac{1}{2}ab$$

$$2,5m \cdot 2 = 5m^2 \quad S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1,5 = 1,5m^2$$

$$4 \cdot 1,5 = 6m^2$$

Ats.: 1) 5m 2) 650g 3) 11340kr 4) 6m<sup>2</sup>

38 pav. 13 uždavinio „sprendimas“



## IŠVADOS

1. Matematikos brandos egzamino bendrieji rezultatai rodo, kad šįmet egzaminas buvo mokiniams paprastesnis nei pernai metais.
2. Dauguma egzaminą laikusių mokinių gavo vidutinius egzamino įvertinimus.
3. Geriausiai mokiniams sekėsi spręsti žemesniųjų klasių kurso uždavinius (santykio, procentų).
4. Dauguma mokinių, nagrinėdami realaus turinio situacijas, neskyrė, kada reikia sudaryti lygtis, o kada nelygybes. Beveik trečdalis mokinių neskyrė sąvokų „ne mažiau“, „mažiau“ ir pan.
5. Nemaža dalis mokinių realaus turinio uždaviniams nemokėjo teisingai pritaikyti matematinio modelio.
6. Didžioji dalis mokinių nemokėjo taisyklingai užrašyti periodinių trupmenų.
7. Buvo mokinių, taikiusių geometrines formules (iš egzamino formulių sąrašo), tačiau visai nesuvokusių jų prasmės – nei kokiais atvejais ta formule reikia naudotis, nei ką reiškia formulės simboliai.
8. Beveik pusė mokinių, sprendami stereometrijos uždavinį, nebraižė brėžinio, o tie, kurie braižė, neretai tai darė neteisingai.
9. Kai kurie mokiniai neturėjo jokio supratimo apie matavimo vienetus.
10. Mokiniai nemokėjo užrašyti uždavinių sprendimų, dažnai spėliojo atsakymus.
11. Esant ilgesnei uždavinio sąlygai kai kurie mokiniai pamiršo, ką skaičiuoja, ir atsakyme užrašė ne galutinį, o tik dalinį atsakymą.
12. Dalis mokinių neatidžiai perrašinėjo uždavinio sprendimus nuo juodraščių (praleidinėjo / keitė ženklus) arba netiksliai užrašė atsakymus – sprendimo metu gautas ir užrašytasis atsakymas nesutapo.