Funkcinės lygtys. B lygis

Įvadas

Norint nagrinėti funkcinių lygčių sprendimo temą, reikia prisiminti keletą sąvokų ir teiginių iš mokyklinio matematikos kurso.

Apibrėžimas. Tarkime, X ir Y yra dvi aibės. Funkcija – tai dėsnis (taisyklė), pagal kurią kiekvienam aibės X elementui priskiriamas vienintelis Y aibės elementas.

Apibrėžimas. Tarkime, kad funkcijos f apibrėžimo sritis simetriška nulio atžvilgiu, t. y. jei $x \in X$, tai ir $-x \in X$. Funkcija, tenkinanti šio apibrėžimo sąlygą $f(-x) = f(x)$, vadinama lygine, o $f(-x) = -f(x)$ – nelygine.

Apibrėžimas. Funkcija f vadinama periodine, jei egzistuoja toks $T \neq 0$, kad su kiekvienu x iš apibrėžimo srities skaičiai $x - T$ ir $x + T$ taip pat priklauso apibrėžimo sričiai ir galioja lygybė $f(x + T) = f(x)$. Skaičius T vadinamas funkcijos f periodu.

Apibrėžimas. Funkciją f: A → B vadinsime monotonine, jei ji yra arba nedidėjanti, arba nemažėjanti, t. y. arba $f(x) \leq f(y)$ su visais $x > y$ $(x, y \in A)$, arba $f(x) \geq f(y)$ su visais $x > y$ $(x, y \in A)$.

Apibrėžimas. Funkcija $f\colon X \to Y$ vadinama injektyviąja, arba injekcija, jeigu su visais $x_1, x_2 \in X$ ir $y \in Y$. Jei $f(x_1) = y$ ir $f(x_2) = y$, tai išeina, kad $x_1 = x_2$ (jei su visais x_1, x_2 ir $x_1 \neq x_2$ turime $f(x_1) \neq f(x_2)$).

Apibrėžimas. Funkcija $f\colon X \to Y$ vadinama surjektyviąja, arba surjekcija, jeigu bet kuriam $y \in Y$ egzistuoja toks $x \in X$, kad $f(x) = y$.

Apibrėžimas. Funkcija $f\colon X \to Y$ vadinama bijektyviąja, arba bijekcija, jeigu ji yra ir injektyvi, ir surjektyvi.

Pagrindiniai funkcinių lygčių sprendimo metodai:

1. Keitimo metodas.
2. Manipuliavimo funkcijos apibrėžimo sritimi metodas.
3. Funkcijos pagrindinių savybių – injektyvumo arba surjektyvumo – panaudojimo metodas.
4. Neapibrėžtų koeficientų metodas.
5. *Koši* funkcinės lygties metodas.

II. Manipuliavimo funkcijos apibrėžimo sritimi metodas

Bene lengviausias funkcinių lygčių sprendimo būdas yra **manipuliavimas funkcijos apibrėžimo sritimi**. Šio metodo esmė yra pakeisti kintamąjį kokia nors skaitine reikšme. Ši reikšmė dažniausiai kinta intervalu [-2 ... 2].

1 pavyzdys.

Funkcija f: R → R tenkina lygybę $f(f(x) + x) = x$. Raskite $f(0)$.

Sprendimas. Atlikę keitinį $x \to 0$, turime $f(f(0) = 0$, x pakeitę į $f(0)$, turime $f(f(f(0)) + f(0)) = f(0)$, $\Rightarrow$ $f(f(0)) = f(0)$. Kairė lygybės pusė lygi nuliui, todėl $f(0) = 0$.

Atsakymas – $f(0) = 0$.

2 pavyzdys.

Raskite visas funkcijas f: R → R ir g: R → R, tenkinančias lygtį $f(x) \cdot g(y) = x + y + 1$, kai $x, y \in$ R.

Sprendimas. Atlikę keitinį $x \to 0$ ir $y \to 0$, turime $f(0) \cdot g(0) = 1$. Taigi $f(0)$ ir $g(0)$ reikšmės nėra lygios 0. Atlikę keitinį $x \to 0$ ir $y \to -1$, turime $f(0) \cdot g(-1) = 0$. Kadangi $f(0) \neq 0$, tai $g(-1) = 0$. Atlikę keitinį $x = -1$, $y = -1$, turime, kad $f(-1) \cdot g(-1) = -1$, o tai prieštarauja, kad $g(-1) = 0$. Vadinasi, tokių funkcijų nėra.

Atsakymas – tokių funkcijų nėra.

3 pavyzdys.

Raskite visas funkcijas $f\colon R \to R$, tenkinančias lygtį $f(x)f(y) - f(xy) = x + y$, kai $x, y \in R$.

Sprendimas. Atlikę keitinį $x \to 0$ ir $y \to 0$, turime $f^2(0) = f(0)$, t. y. $f(0) = 0$ arba $f(0) = 1$. Išnagrinėkime abu atvejus, kai $f(0) = 0$ arba $f(0) = 1$. Jei $f(0) = 0$, tai įstatę į pradinę lygtį $x = 0$, turime, kad $y = 0$, todėl ši lygybė jokiai funkcijai negalioja su visomis realiosiomis y reikšmėmis. Lieka nagrinėti atvejį, kai $f(0) = 1$. Įsistatę į pradinę lygtį $x = 0$, turime $f(y) = y + 1$, $\Rightarrow f(x) = x + 1$. Patikrinę matome, kad ši funkcija $f(x) = x + 1$ tenkina lygtį.

Atsakymas – $f(x) = x + 1$.

4 pavyzdys.

Raskite funkcijas $f\colon R \to R$, tenkinančias lygtį $(x+y)(f(x)\text{-}f(y)) = f(x^2) - f(y^2)$, kai $x, y \in R$.

Sprendimas. Atlikę keitinį $y \to 0$, turime $x(f(x)\text{-}f(0)) = f(x^2) - f(0)$. (1)

Atlikę keitinį $y \to 1$, turime $(x+1)(f(x) - f(f)) = f(x^2) - f(1)$. (2) Iš antros lygybės atėmę pirmą, turime $f(x)=(f(1) - f(0))x + f(0)$ su visais x, todėl $f(x) = ax + b$, kai $a = f(1) - f(0)$ ir $b = f(0)$. Įstatę į pradinę lygtį matome, kad lygybė yra teisinga su visomis realiosiomis a ir b reikšmėmis.

Atsakymas – $f(x) = ax + b$, kai $a, b \in R$.

5 pavyzdys.

Raskite visas funkcijas $f\colon R \to R$ tokias, kad su visais teigiamais x, y galiotų lygybė $f(x - y) = f(x) + y$.

Sprendimas. Atlikę keitinį $y \to x$, turime $f(0)= f(y) + y$, atlikę kitą keitinį $y \to x$, turime $f(0) = f(x) + x$, taigi su visais teigiamais x galioja $f(x) = -x + f(0)$. Atlikę keitinį $y \to 2x$, turime $f(-x) = f(x) + 2x = (-x + f(0)) + 2x = x + f(0)$, taigi su visais neigiamais x taip pat galioja lygybė $f(x)= -x + f(0)$. Reikia surasti $f(0)$. Pasižymėję $f(0) = c$, turime $f(x) = -x + c$. Įstatę funkciją $f(x) = -x + c$ į pradinę lygybę, matome, kad lygybė yra teisinga su visomis realiosiomis c reikšmėmis.

Atsakymas – $f(x) = -x + c$, kai $c \in R$.

Uždaviniai

1. Raskite visas funkcijas $f\colon R \to R$, tenkinančias lygtį $f(x^3) - f(y^3) = (x^2 + xy + y^2)(f(x) - f(y))$, $x \in R$, $y \in R$.

P. Įstatykite į lygtį $x = 0$ ir $y = 1$.

2. Išspręskite funkcinę lygtį $f^2(x) + f(x) \cdot f(y) = x^2 + xy$, $x \in R$, $y \in R$.

P. Įstatykite į lygtį $x = 0$ ir $y = 0$, suraskite funkcijos $f(1)$ reikšmes.

3. Raskite visas funkcijas $f(x)$, tenkinančias lygybę $f(xf(y))f(y) = f(x + y)$, kai $x, y \geq 0$, $f(2) = 0$, $f(x) \neq 0$, kai $x \in [0; 2)$.

P. Įstatykite į lygtį $x = 0$ ir $y = 2$ ir atlikite keitinį $x \to 2 - x$.

4. Raskite visas funkcijas $f\colon R \to R$, tenkinančias lygybę $f(x + f(y)) = f(f(x)) + y$, kai $x \in R$, $y \in R$.

P. Įstatykite į lygtį $x = 0$ ir $y = 0$.

5. Raskite visas funkcijas $f\colon R \to R$, tenkinančias lygybę $f(x + y)) = 2^y f(x)$, $x \in R$, $y \in R$.

P. Įstatykite į lygtį $x = 0$.

Uždavinių sprendimas taikant manipuliavimo funkcijos apibrėžimo sritimi metodą

1 uždavinys.

Raskite visas funkcijas f: R → R, tenkinančias lygtį $f(x^3) - f(y^3) = (x^2 + xy + y^2)(f(x) - f(y))$, $x \in$ R, $y \in$ R.

Sprendimas. Nuosekliai atlikę keitinius $y \to 1$ ir $y \to 0$, turime $f(x^3) = (x^2 + x + 1)(f(x) - f(1)) + f(1)$ ir $f(x^3) = x^2(f(x) - f(0)) + f(0)$, kai $x \in$ R, tad sulyginę dešiniąsias lygybių puses turime $f(x) = xf(1) + (1 - x)f(0)$, $\Rightarrow f(x) = (f(1) - f(0))x + f(0)$, tai yra tiesinė funkcija $f(x) = ax + b$, kai $a = f(1) - f(0)$ ir b $= f(0)$. Įstatę į pradinę lygtį funkciją $f(x) = ax + b$ matome, kad lygybė yra teisinga su visomis a ir b reikšmėmis.

Atsakymas – $f(x) = ax + b$, kai $a, b \in$ R.

2 uždavinys.

Išspręskite funkcinę lygtį $f^2(x) + f(x) \cdot f(y) = x^2 + xy$, $x \in$ R, $y \in$ R.

Sprendimas. Lygybėje $f^2(x) + f(x) \cdot f(y) = x^2 + x$ atlikę keitinius $x \to 0$ ir $y \to 0$, turime $2f^2(0) = 0$, todėl $f(0) = 0$. Atlikę keitinį $y \to 0$, turime $f^2(x) = x^2$. Įstatę x^2 vietoj $f^2(x)$ į pradinę lygtį, turime $f(x)f(y) = xy$. Šioje lygtyje atlikę keitinius $x \to 1$ ir $y \to 1$, turime $f(1) \cdot f(1) = 1$. Todėl $f(1) = 1$ arba $f(1) = -1$. Kai $f(1) = 1$, tai $y = 1 \Rightarrow f(x) = x$. Kai $f(1) = -1$, tai $y = -1 \Rightarrow f(x) = -x$.

Patikriname, ar funkcijos $f(x) = x$ ir $f(x) = -x$ yra lygties sprendiniai. Matome, kad abi funkcijos yra lygties sprendiniai.

Atsakymas – $f(x) = x$, $f(x) = -x$.

3 uždavinys.

Raskite visas funkcijas $f(x)$, tenkinančias lygybę $f(xf(y))f(y) = f(x + y)$, kai $x, y \geq 0$, $f(2)=0$, $f(x) \neq 0$, kai $x \in [0; 2)$.

Sprendimas. Nuosekliai atlikę keitinius $x \to 0$ ir $y \to 2$, turime $f(0)f(y) = f(y) \Rightarrow f(0) = 1$ ir $f(0) \cdot f(2) = f(x + 2) \Rightarrow f(x + 2) = 1 \cdot 0 = 0$. Taigi $f(x) = 0$, kai $x \in [2;+\infty)$. Įstatę į pradinę lygtį $y \to 2 - x$, turime $f(xf(2 - x)) \cdot f(2 - x) = f(x + 2 - x) \Rightarrow f(xf(2 - x)) f(2 - x) = 0$.

Kadangi $f(2 - x) \neq 0$, tai $f(xf(2 - x)) = 0 = f(2)$. Taigi $xf(2 - x) = 2$. Atlikę keitinį $x \to 2 - x$, turime $f(2 - 2 + x) = f(x) = \frac{2}{2-x}$. Patikrinę matome, kad ši funkcija $f(x) = \frac{2}{2-x}$ tenkina lygybę.

Atsakymas – $f(x) = \frac{2}{2-x}$.

4 uždavinys.

Raskite visas funkcijas f: R → R, tenkinančias lygybę $f(x + f(y)) = f(f(x)) + y$, kai $x \in$ R, $y \in$ R

Sprendimas. Nuosekliai atlikę keitinius $y \to 0$ ir $x \to 0$, turime $f(f(x)) = f(x + f(0))$ (1) ir $f(f(y)) = f(f(0)) + y$, o tai ekvivalentu $f(f(x)) = x + f(f(0))$ (2). Sulyginę (1) ir (2) lygybių kairiąsias puses, turime $f(x + f(0)) = f(f(0)) + x \Rightarrow f(x) = x + c$.

Patikrinę matome, kad ši funkcija $f(x) = x + c$ tenkina lygtį su visomis realiosiomis c reikšmėmis.

Atsakymas – $f(x) = x + c$, kai $c \in$ R.

5 uždavinys.

Raskite visas funkcijas f: R → R, tenkinančias lygybę $f(x + y)) = 2^y f(x)$, kai $x \in$ R, $y \in$ R.

Sprendimas. Atlikę keitinį $x \to 0$, turime $f(y) = 2^y f(0) = c \cdot 2^y$, c ∈ R. Patikrinsime, ar funkcija $f(x) = 2^x f(0) = c \cdot 2^x$ tenkina lygybę $f(x + y)) = 2^y f(x)$. Įstatę $f(x) = c \cdot 2^x$, turime $c \cdot 2^{x+y} = 2^y \cdot c \cdot 2^x = c \cdot 2^{x+y}$. Lygybė yra teisinga.

Atsakymas – $f(x) = c \cdot 2^x$.