

# Funkcinės lygtys. c lygis

## Išvadas

Norint nagrinėti funkcinių lygčių sprendimo temą, reikia prisiminti keletą sąvokų ir teiginių iš mokyklinio matematikos kurso.

**Apibrėžimas.** Tarkime,  $X$  ir  $Y$  yra dvi aibės. Funkcija – tai dėsni (taisyklė), pagal kurią kiekvienam aibės  $X$  elementui priskiriamas vienintelis  $Y$  aibės elementas.

**Apibrėžimas.** Tarkime, kad funkcijos  $f$  apibrėžimo sritis simetriška nulinio atžvilgiu, t. y. jei  $x \in X$ , tai ir  $-x \in X$ . Funkcija, tenkinanti šio apibrėžimo sąlygą  $f(-x) = f(x)$ , vadinama lygine, o  $f(-x) = -f(x)$  – ne-lygine.

**Apibrėžimas.** Funkcija  $f$  vadinama periodine, jei egzistuoja toks  $T \neq 0$ , kad su kiekvienu  $x$  iš apibrėžimo srities skaičiai  $x - T$  ir  $x + T$  taip pat priklauso apibrėžimo sričiai ir galioja lygybė  $f(x + T) = f(x)$ . Skaičius  $T$  vadinamas funkcijos  $f$  periodu.

**Apibrėžimas.** Funkciją  $f: A \rightarrow B$  vadinsime monotone, jei ji yra arba nedidėjanti, arba nemažėjanti, t. y. arba  $f(x) \leq f(y)$  su visais  $x > y$  ( $x, y \in A$ ), arba  $f(x) \geq f(y)$  su visais  $x > y$  ( $x, y \in A$ ).

**Apibrėžimas.** Funkcija  $f: X \rightarrow Y$  vadinama injektyviaja, arba injekcija, jeigu su visais  $x_1, x_2 \in X$  ir  $y \in Y$ . Jei  $f(x_1) = y$  ir  $f(x_2) = y$ , tai išeina, kad  $x_1 = x_2$  (jei su visais  $x_1, x_2$  ir  $x_1 \neq x_2$  turime  $f(x_1) \neq f(x_2)$ ).

**Apibrėžimas.** Funkcija  $f: X \rightarrow Y$  vadinama surjektyviaja, arba surjekcija, jeigu bet kuriam  $y \in Y$  egzistuoja toks  $x \in X$ , kad  $f(x) = y$ .

**Apibrėžimas.** Funkcija  $f: X \rightarrow Y$  vadinama bijektyviaja, arba bijekcija, jeigu ji yra ir injektyvi, ir surjektyvi.

## Pagrindiniai funkcinių lygčių sprendimo metodai:

1. Keitimo metodas.
2. Manipuliavimo funkcijos apibrėžimo sritimi metodas.
3. Funkcijos pagrindinių savybių – injektyvumo arba surjektyvumo – panaudojimo metodas.
4. Neapibrėžtų koeficientų metodas.
5. Koši funkcinės lygties metodas.

## III. Funkcijos pagrindinių savybių – injektyvumo arba surjektyvumo – panaudojimo metodas

Injektyvios funkcijos pavyzdžiai:  $f(x) = ax + b$ ,  $f(x) = ax^3$ ,  $f(x) = a/x$ ,  $f(x) = ae^x$ ,  $a \neq 0$ . Neinjektyvios funkcijos pavyzdžiai:  $f(x) = ax^2$ ,  $f(x) = ax^3 + bx$ ,  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$ .

### 1 pavyzdys.

Funkcija  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tenkina lygtį  $f(f(x)) = x$ . Įrodykite, kad  $f(x)$  yra injekcija.

*Sprendimas.* Jei  $f(a) = f(b)$ , tai įrodysime, kad  $a = b$ . Jei  $f(a) = f(b)$ , tai ir  $f(f(a)) = f(f(b))$ . Kadangi  $f(f(a)) = a$  ir  $f(f(b)) = b$ , tai  $a = b$ .

Atsakymas – funkcija  $f(x)$  yra injekcija.

### 2 pavyzdys.

Funkcija  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tenkina lygtį  $f(f(x)) = x$ . Įrodykite, kad funkcija yra surjekcija.

*Sprendimas.* Įrodysime, kad kiekvienam skaičiui  $b$  egzistuoja toks  $a$ , kad  $f(a) = b$ . Vietoj  $x$  įrašę  $b$  gauname  $f(f(b)) = b$ , t. y. funkcija  $f(x)$  su tam tikra argumento reikšme įgyja skaičių  $b$ .

Atsakymas – funkcija  $f(x)$  yra surjekcija.

### 3 pavyzdys.

Raskite visas funkcijas  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , tenkinančias lygtį  $f(f(x)) = f(x)$ .

*Sprendimas.* Įrodome, kad funkcija yra injekcija (1 pavyzdys). Kadangi funkcija yra injekcija, tai iš lygybės  $f(a) = f(b)$  turime, kad  $a = b$  su visais  $a, b \in \mathbb{R}$ . Lygybėje  $f(a) = f(b)$  pakeitę  $a$  į  $f(x)$ , o  $b$  į  $x$ , gauname  $f(f(x)) = f(x) \Rightarrow f(x) = x$ , kai  $x \in \mathbb{R}$ .

Atsakymas – funkcija  $f(x) = x$ , kai  $x \in \mathbb{R}$ .

### 4 pavyzdys.

Raskite visas funkcijas  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , tenkinančias lygtį  $f(f(x)) = f(x)$ .

*Sprendimas.* Parodome, kad funkcija yra surjekcija (2 pavyzdys). Surjektyvi funkcija įgyja visas funkcijos

reikšmių srities reikšmes, taigi, pažymėję  $f(x) = y$ , turime  $f(y) = y$ . Vadinasi,  $f(x) = x$ , kai  $x \in \mathbb{R}$ .

Atsakymas – funkcija  $f(x) = x$ , kai  $x \in \mathbb{R}$ .

### 5 pavyzdys.

Raskite visas funkcijas  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , tenkinančias lygtį  $f(x + f(y)) = f(f(x) + y)$ .

*Sprendimas.* Jei žinotume, kad funkcija yra injekcija, iš karto turėtume  $f(x + f(y)) = f(f(x) + y) \Rightarrow x + f(y) = f(x) + y$ , o tokią lygtį jau mokėsime spręsti. Užtenka įsistatyti, pavyzdžiui,  $y = 0$  ir gauti  $f(x) = x + c$ , kur  $c$  bet koks realusis skaičius. Patikrinę matome, kad ši funkcija  $f(x) = x + c$  tenkina lygtį su visomis realiosiomis  $c$  reikšmėmis.

Atsakymas –  $f(x) = x + c$ , kai  $c \in \mathbb{R}$ .

## Uždaviniai

1. Funkcija  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tenkina lygtį  $f(x + f(y)) = f(x) + y$ . Įrodykite, kad funkcija  $f(x)$  yra injekcija.

2. Funkcija  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tenkina lygtį  $f(x + f(y)) = f(x) + y$ . Įrodykite, kad funkcija  $f(x)$  yra surjekcija.

## Funkcinės lygtys. C lygis

3. Funkcija  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tenkina lygtį  $f(f(x) + x) = x$ . Raskite  $f(0)$ .

4. Funkcijos  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tenkina lygtį  $x + f(x) = f(f(x))$ , kai  $x \in \mathbb{R}$ . Raskite lygties  $f(f(x)) = 0$  sprendinius.

5. Funkcijos  $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$  visiems racionaliesiems  $x, y$  tenkina lygtį  $f(x + y) = f(x) + f(y)$ . Įrodykite, kad  $f(rx) = rf(x)$ , kai  $r$  – racionalusis skaičius.