Pirminiai ir sudėtiniai skaičiai

Įžanga

Mokytojui

Šios temos uždaviniai nuolat skatina mokinius prisiminti pirminių ir sudėtinių skaičių apibrėžimą, Eratosteno rėtį bei pagrindinę aritmetikos teoremą (bet kurio natūraliojo skaičiaus išskaidymą pirminiais dauginamaisiais vieninteliu būdu). Užduotys rekomenduojamos 6–8 klasių mokiniams, nors nemažai jų sėkmingai tinka ir 9–10 klasėse kaip temos kartojimo pratimai.

Pateiktos užuominos suteikia galimybę didinti mokinio indėlį (padedant mokytojui) ir progų užsiminti apie svarbius niuansus. Patartina, kad mokiniai nesinaudotų pirminių skaičių lentele, o skaičiuokliais – tik daugiaženkliams skaičiams dalyti / skaidyti pirminiais dauginamaisiais.

Pastaba – raudonas tekstas (jis tik sprendimuose) skirtas atkreipti mokytojų dėmesį į svarbius niuansus.

Uždaviniai

1. Skaičių 32 galima dviem skirtingais būdais užrašyti kaip dviejų pirminių skaičių sumą: 32 = 3 + 29 = 13 + 19.

Keliais skirtingais būdais galima skaičių 24 užrašyti kaip dviejų pirminių skaičių sumą? (Jei skiriasi tik tų pačių dėmenų išsidėstymas, tai nėra naujas būdas.)

S. 24 = 5 + 19 = 7 + 17 = 11 + 13.

Ats.: **3 būdais.**

2. Pirminis skaičius vadinamas superpirminiu, jei jį padauginus iš 2 ir atėmus 1, irgi turimas pirminis skaičius. Rask visus superpirminius skaičius, mažesnius už 15.

S. Patikrinę skaičius 2, 3, 5, 7, 11 ir 13, randame, kad tik trys iš jų yra superpirminiai: $2 \cdot 2 - 1 = 3$, $3 \cdot 2 - 1 = 5$, $7 \cdot 2 - 1 = 13$.

Ats.: **2, 3 ir 7.**

3. Du skaičius įrašę (vieną) į skaitiklį ir (kitą į) vardiklį, sudarome vieną trupmeną. Panaudodamas skaičius nuo 1 iki 10 (kiekvieną lygiai po 1 kartą) sudaryk 5 trupmenas, kurių kiekviena būtų lygi sveikajam skaičiui.

P. Kuris(-ie) iš skaičių gali būti tik skaitiklyje?

S. Skaičiai nuo 6 iki 10 tegali būti skaitikliuose, kitaip kažkuri trupmena nebus sveikasis skaičius. Skaičius 7 teturi vienintelį daliklį 1, tad pirmoji aiški trupmena yra $\frac{7}{1}$. Tuomet devynetui lieka vienintelis „laisvas“ daliklis 3 – trupmena yra $\frac{9}{3}$. Tuomet šešetui lieka vienintelis „laisvas“ daliklis 2 – trupmena yra $\frac{6}{2}$. Likusios dvi trupmenos irgi nustatomos vienareikšmiškai: $\frac{8}{4}$ ir $\frac{10}{5}$.

Ats.: $\mathbf{\frac{7}{1}, \frac{9}{3}, \frac{6}{2}, \frac{8}{4}, \frac{10}{5}}$.

4. Keli skaičiaus 48 dalikliai nėra nei pirminiai, nei trejeto kartotiniai?

P. Nebūtina išrašyti visų skaičiaus 48 daliklių – pakanka išskaidyti jį pirminiais dauginamaisiais.

S. $48 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$, todėl tinka tik tie dalikliai, kurie yra aukštesni dvejeto laipsniai arba 1 (ypatingas skaičius – nei pirminis, nei sudėtinis).

Ats.: **1, 4, 8, 16 – iš viso keturi.**

5. Pusiau pirminiu (arba beveik pirminiu) vadinamas toks skaičius, kurio sandaugą sudaro du (nebūtinai skirtingi) pirminiai skaičiai. Todėl 4 ir 6 yra du mažiausi pusiau pirminiai skaičiai. Koks yra dešimtas pagal dydį pusiau pirminis skaičius?

	2	3	5	7	11	13
2	4	6	10	14	22	26
3		9	15	21	33	
5			25	35		
7				49		
11						
13						

P. Patartina susidaryti lentelę su mažiausių pirminių skaičių sandaugomis.

S. Sandaugų lentelė gali atrodyti taip (pakanka pildyti jos įstrižainę ir kurią nors vieną pusę, kad nesidubliuotų įrašai).

Ats.: **10-as pagal dydį yra 26.**

6. Raskite didžiausią dviženklį pirminį skaičių, kuris lygus kitų dviejų pirminių skaičių sumai.

P. Atkreipkite dėmesį, kiek tarp pirminių skaičių yra nelyginių, o kiek lyginių.

S. Labai svarbu, kad mokiniai įsimintų, kad „pirminis – tai nelyginis, nebent tai 2". Šis faktas bus svarbus ir keliems tolesniems uždaviniams. Sudėję du nelyginius pirminius skaičius, turėtume lyginį skaičių, kuris tikrai nebūtų pirminis (nes didesnis už 2). Vadinasi, ieškomas pirminis skaičius $P = R + 2$ (čia R – irgi pirminis skaičius). Pradėję nuo skaičiaus 97 ir tikrindami visus nelyginius, nesibaigiančius 5, randame $73 = 71 + 2$.

Ats.: **71.**

7. Keliais būdais galima užrašyti skaičių 47 kaip trijų pirminių skaičių sumą? (Jei skiriasi tik tų pačių dėmenų išsidėstymas, tai nėra naujas būdas.)

P. Kiek tarp tų trijų dėmenų gali būti lyginių, o kiek nelyginių skaičių? Raskite taktiką, kuri leistų nepraleisti nei vieno užrašymo būdo.

S. 47 (N) = N + N + N arba L + L + N (čia N / L – nelyginis / lyginis). Kad garantuotai būtų užrašyti visi būdai, verta pradėti nuo didžiausio galimo dėmens, o po to rašyti kitą didžiausią galimą skaičių, bet neviršijantį pirmojo:

$43 + 2 + 2$ $\quad$ $41 + 3 + 3$

$37 + 7 + 3$ $\quad$ $37 + 5 + 5$

$31 + 13 + 3$ $\quad$ $31 + 11 + 5$

$29 + 13 + 5$ $\quad$ $29 + 11 + 7$

$23 + 19 + 5$ $\quad$ $23 + 17 + 7$

$23 + 13 + 11$ $\quad$ $19 + 17 + 11$

$17 + 17 + 13$ $\quad$ Ats.: **iš viso 13 būdų.**

8. Rask keturių pirminių skaičių, mažiausiai besiskiriančių nuo 58, aritmetinį vidurkį.

S. Artimiausi skaičiui 58 yra pirminiai 59, 61, 53 ir 67, kurių vidurkis – 60.

Ats.: **60.**

9. Rask visus dviženklius skaičius, kurių vienas kaimynas yra pirminis skaičius, o kitas – tikslus kvadratas (t. y. sveikojo skaičiaus kvadratas).

P. Verta peržiūrėti kvadratų kaimynus – kvadratų yra mažiau nei pirminių skaičių. Beje, ar lyginio skaičiaus kaimyno kaimynas gali būti pirminis?

S. Patikrinę visus nelyginių skaičių kvadratus, randame šiuos penkis skaičius:

9 (K) – **10** – 11 (P), 23 (P) – **24** – 25 (K), 47 (P) – **48** – 49 (K), 79 (P) – **80** – 81 (K), 81 (K) – **82** – 83 (P).

Ats.: **10, 24, 48, 80, 82.**

10. Skaitmenis 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ir 9 panaudokite lygiai po 1 kartą ir sudarykite keturis dviženklius pirminius skaičius, kad skirtumas tarp didžiausio ir mažiausio būtų įmanomas didžiausias.

P. Kokiais skaitmenimis negali baigtis dviženklis pirminis skaičius?

S. Skaitmenis 2, 4, 5 ir 6 turime naudoti dešimčių vietoje. Kad skirtumas tarp didžiausio ir mažiausio būtų įmanomas didžiausias, sudarome 23, 41, 59 ir 67.

Ats.: **23, 41, 59 ir 67.**

11. Šeši skirtingi skaičiai užrašyti ant trijų kortelių – po vieną ant kiekvienos pusės. Sudėję bet kurios kortelės abiejų pusių skaičius, turėtume tą pačią sumą. Nematomose pusėse visi skaičiai yra pirminiai. Kokia jų suma?

44	59	38

P. Ar pamenate, kiek tarp pirminių skaičių yra nelyginių, o kiek lyginių skaičių?

S. Jei kitoje pusėje nei 44 būtų lyginis pirminis skaičius, tai jis turėtų būti 2. Bet tuomet 38-ių „porininkas“ būtų 8 – t. y. ne pirminis skaičius. Vadinasi, 44-ių „porininkas“ yra nelyginis. Tuomet minėtoji suma – irgi nelyginė, o 59-ių „porininkas“ – lyginis, t. y. 2. (Galimi ir kitokie pagrindimo variantai.)

Ats.: **nematomų pusių suma lygi 2 + 17 + 23 = 42.**

12. Dviejų natūraliųjų skaičių sandauga lygi 167. Kam lygi jų suma?

P. O kokie šio skaičiaus dalikliai?

S. Nuojauta, kad 167 yra pirminis skaičius – labai naudinga. Kaip ją pasitikrinti, atliekant kuo mažiau veiksmų?

1) Labai svarbu, kad mokiniai ieškodami daliklių dalytų 167 tik iš pirminių skaičių (argumentas – jei nedalu iš 2, tai nebus dalus ir iš bet kokio lyginio skaičiaus; taip pat, jei nedalus iš 3, tai nebus dalus ir iš bet kokio trejeto kartotinio.)

2) Kitas svarbus klausimas – kokį didžiausią (galimą) daliklį užtenka patikrinti? Tam svarbus supratimas, kad skaičiaus N dalikliai tarsi eina poromis – D ir $\frac{N}{D}$; tokios poros sandauga lygi N. Pvz., 1 ir N, 2 ir $\frac{N}{2}$ (jei N – lyginis) ir t. t. Todėl jei dalydami 167 iš 13, dalmenį turime mažesnį už 13, galime sustoti ieškoję – juk jei rastume didesnį daliklį, jo „porininkas“ būtų mažesnis, o visus galimus mažesnius jau patikrinome. Bendru atveju sakome, kad bandydami nustatyti, ar skaičius N nėra pirminis, pakanka patikrinti jo dalumą iš pirminių skaičių, ne didesnių už $\sqrt{N}$.

Tad mokiniai turėtų patikrinti, ar 167 dalus iš 2, 3, 5 (šiuos tris – mintinai) ir iš 7, 11 ir 13. Iš to bus aišku, kad 167 – pirminis, tad vienintelis būdas jį gauti kaip sandaugą yra 1 · 167.

Ats.: **1 + 167 = 168.**

13. Kokią liekaną turėsime pirmųjų septynių pirminių skaičių sandaugą padaliję iš 510?

P. Išskaidykite 510 pirminiais dauginamaisiais.

S. Pirmieji 7 pirminiai skaičiai yra 2, 3, 5, 7, 11, 13 ir 17, o 510 = 2 · 3 · 5 · 17.

Ats.:**neturėsime jokios liekanos.**

14. a) Jei dviženklio skaičiaus A skaitmenis sukeistume vietomis ir padaugintume jį iš B, turėtume 217. Kam lygi A ir B sandauga?

b) Jei dviženklio skaičiaus A skaitmenis sukeistume vietomis ir padaugintume jį iš B, turėtume 253. Kam lygi A ir B sandauga?

P. Išskaidykite: a) 217, b) 253 pirminiais dauginamaisiais.

S. a) 217 = 7 · 31 (1 · 217 netinka), todėl ieškomoji sandauga yra 7 · 13 = 91.

Ats.: **91.**

S. a) 253 = 11 · 23 (1 · 253 netinka), todėl ieškomoji sandauga yra 11 · 32 = 352.

Ats.: **352.**

15. Mėgstamiausias Pauliaus riešutų batonėlis paprastai kainuoja 49 centus. Tad kai parduotuvėje šie batonėliai buvo nukainuoti, Paulius nupirko visus, kiek tik jų buvo. Už šį pirkinį sumokėjo 31 eurą 93 centus. Kiek batonėlių jis įsigijo?

P. Išskaidykite 3193 pirminiais dauginamaisiais.

S. 3193 = 31 · 103, abu dauginamieji – pirminiai, tad kito būdo išskaidyti nėra (1 cnt · 3193 nebūtų tikroviška kaina).

Ats.: **103 batonėlius.**

16. Raskite 48 ir 60 didžiausio bendro daliklio visų daliklių sandaugą.

P. Rašant skaičiaus N daliklius, verta juos poruoti – D su $\frac{N}{D}$.

S. DBD (48; 60) = 12. 12 = 1 · 12 = 2 · 6 = 3 · 4. Bet kurios poros sandauga lygi 12, tad visų daliklių sandauga lygi 123 = 1728.

Ats.: **1728.**

17. Skaičius n mažesnis už 1000, o jo dviejų pirminių daliklių suma lygi 193. Kam gali būti lygus n?

P. Pirminis – vadinasi, …, išskyrus … .

S. Akivaizdu, kad vienas iš tų pirminių daliklių yra 2, kitaip minėta suma būtų lyginė. Jei dalikliai yra 2 ir 191, tai n gali būti $2 \cdot 191$ arba $2 \cdot 2 \cdot 191$ ($2 \cdot 3 \cdot 191 > 1000$).

Ats.: **382 arba 764.**

18. Dviejų dviženklių skaičių sandauga lygi 6545. Kam lygi jų suma?

P. Išskaidykite 6545 pirminiais dauginamaisiais.

S. $6545 = 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 17$. Kaip dviženkliai dauginamieji tinka tik $5 \cdot 17 = 85$ ir $7 \cdot 11 = 77$, taigi $85 + 77 = 162$.

Ats.: **162.**

19. Pradinukas Vilius turi brolius dvynius. Jų trijų amžių sandauga lygi 6561. Kiek metų jo broliams?

P. Išskaidykite 6561 pirminiais dauginamaisiais.

S. Viliui turėtų būti tarp 6 ir 11 metų. Kadangi $6561 = 3^8$, tinka tik variantas $9 \cdot 27 \cdot 27$.

Ats.: **broliams po 27 metus.**

20. Keturių skirtingų natūraliųjų skaičių sandauga lygi 2001. Kam lygi tų skaičių suma?

P. Išskaidykite 2001 pirminiais dauginamaisiais.

S. $2001 = 3 \cdot 23 \cdot 29$, todėl ketvirtas dauginamasis yra 1.

Ats.: **$1 + 3 + 23 + 29 = 56$.**

21. Skaičių vadiname tobulu, jei jo natūraliųjų daliklių suma yra dvigubai už jį didesnė. Mažiausias toks skaičius yra 6, nes $1 + 2 + 3 + 6 = 6 \cdot 2$. Koks yra kitas tobulas skaičius?

S. Tenka imtis variantų perrankos – nebūtina tikrinti pirminių ir pusiaupirminių skaičių. Taip randame $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$.

Ats.: **28.**

22. Iš kokio mažiausio natūraliojo skaičiaus reikia padauginti 180, kad rastume tikslųjį kubą (t. y. natūraliojo skaičiaus kubą)?

P. Išskaidykite 180 pirminiais dauginamaisiais.

S. $180 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$. Kad sandauga būtų tikslusis kubas, turime rasti 2, 3 ir 5 pakeltus (bent) trečiaisiais laipsniais. Todėl, kad apskaičiuotume mažiausią, reikia dauginti iš $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 150$.

Ats.: **iš 150.**

23. Raskite mažiausią skaičių, kuris dalijasi iš bet kokio skaičiaus nuo 1 iki 15.

S. Ieškomas skaičius turi dalytis iš kiekvieno pirminio skaičiaus, kuris pasitaiko iki 15, didžiausio panaudoto laipsnio – pvz., iš $8 = 2^3$ ir $9 = 3^2$.

Ats.: **$5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 8 \cdot 9 = 360360$.**

24. Jei tą patį triženklį skaičių parašytume dukart iš eilės be tarpo, gautume „suklijuotą“ šešiaženklį skaičių (pvz., iš 315 gauname skaičių 315315). Koks yra visų „suklijuotų“ šešiaženklių skaičių didžiausias bendras daliklis?

P. Išskaidykite šešiaženklį ABCABC dauginamaisiais.

S. Šešiaženklis ABCABC = ABC · 1001. Vadinasi, visi tie šešiaženkliai dalijasi iš 1001. Toks ir yra jų DBD.

Ats.: **1001.**

25. a) Užrašyti 6 iš eilės einantys natūralieji skaičiai. Sudėjus 4 iš jų, turima pirminė suma. Ar gali likusiųjų dviejų skaičių suma irgi būti pirminė?

b) Užrašyti 106 iš eilės einantys natūralieji skaičiai. Sudėjus 84 iš jų, turima pirminė suma. Ar gali likusiųjų dvidešimt dviejų skaičių suma irgi būti pirminė?

P. Pirminis – vadinasi, …, išskyrus … .

S. Abiem atvejais tinka toks pats pagrindimas: jeigu gauta suma pirminė, tai ji – nelyginė (kad didesnė už 2 – akivaizdu). Tačiau visų 6 (ar 84) iš eilės einančių skaičių suma irgi nelyginė, nes joje 3 (arba 53) nelyginiai dėmenys. Vadinasi, likusiųjų 2 (ar 22) skaičių suma lyginė, taigi ne pirminė (kad didesnė už 2 – akivaizdu).

26. Trijų dviženklių skaičių sandauga lygi 636405. Kam lygi tų skaičių suma?

P. Išskaidykite 636405 pirminiais dauginamaisiais.

S. $636405 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 29$. Jau $3 \cdot 5 \cdot 7 > 100$, vadinasi, pirminius dauginamuosius reikia „suporuoti“, kad rastume ieškomus dviženklius daugiklius. $29 \cdot 5 > 100$, vadinasi, 29 bus poroje su 3. Analogiškai išsiaiškiname, kad kiti du bus $5 \cdot 19 = 95$ ir $7 \cdot 11 = 77$. $636405 = 87 \cdot 95 \cdot 77$.

Ats.: **87 + 95 + 77 = 259.**

27. Ponas Jonaitis turi 4 anūkus, kurių amžių sandauga lygi 67184. Tik vienas iš anūkų yra paauglys (t. y. nuo 11 iki 19 metų imtinai), o vyriausias iš jų dar neturi 40 metų. Be to, vyriausio ir jauniausio anūko amžių skirtumas lygus 30. Kokio amžiaus jo anūkai?

P. Išskaidykite 67184 pirminiais dauginamaisiais.

S. $67184 = 2^4 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$. Patikrinus abu variantus, kokio amžiaus galėtų būti vyriausias, t. y. $2 \cdot 17 = 34$ ir $2 \cdot 19 = 38$, randame, kad tinka tik pirmasis. Tuomet anūkams yra $2 \cdot 2 = 4$, 19, $2 \cdot 13 = 26$ ir $2 \cdot 17 = 34$ metai.

Ats.: **4, 19, 26 ir 34 metai.**

Dalumas ir liekanos

1. Sugalvojau skaičių. Jei 100 padalyčiau iš jo, turėčiau liekaną 4. O jei 90 padalyčiau iš jo, turėčiau liekaną 18. Kokį skaičių sugalvojau?

P. Kokie skaičiai dalijasi iš mano sugalvoto skaičiaus be liekanos?

S. Be liekanos iš mano sugalvoto skaičiaus dalijasi 100 – 4 = 96 ir 90 – 18 = 72. Be to, sugalvotasis skaičius turi būti didesnis už 18, kad būtų galima turėti tokio dydžio liekaną. Tuo pasižymi vienintelis bendras 96 ir 72 daliklis – 24.

Ats.: **24.**

2. Kokią liekaną gauname padalinę 813 ir 907 sandaugą iš 63 ir 37 sumos?

P. Kurie dauginamųjų skaitmenys svarbūs, o kurie – ne?

S. Sudauginti 813 ir 907 skaičiuokliu arba stulpeliu nebūtų vertinga. Nustačius, kad 63 + 37 = 100, derėtų kelti sau klausimą, kurie 813 ir 907 sandaugos skaitmenys bus svarbūs, o kartu, kurie 813 ir 907 skaitmenys bus svarbūs. Supratus, kad dalumo iš 100 liekana yra paskutinių dviejų skaitmenų, sudaromas dviženklis skaičius, pakanka kreipti dėmesį į abiejų dauginamųjų paskutinius du skaitmenis. Tuomet lieka mintinai sudauginti 13 ir 7.

Ats.: **91.**

3. Rask tris mažiausius skaičius, kurie pasižymi tuo, kad 109 padalijus iš bet kurio jų, liekana 4.

P. Koks skaičius dalijasi iš ieškomų skaičių be liekanos?

S. Be liekanos iš tų skaičių dalijasi 109 – 4 = 105. Be to, ieškomi skaičiai turi būti didesni už 4, kad liktų tokio dydžio liekana. Tokie yra šie 105 dalikliai – 5, 7 ir 15.

Ats.: **5, 7 ir 15.**

4. Sugalvojau natūralųjį skaičių. Jį padalijus iš 5, liekana 2. O jei dalyčiau iš 6 – liekana 1. Koks tas skaičius, jei gautų dalmenų skirtumas (iš didesnio atėmus mažesnį) lygus 3?

P. Koks sąryšis sieja dalinį (x), daliklį (y), dalmenį (z) ir liekaną (t)?

S. Dalinį (x), daliklį (y), dalmenį (z) ir liekaną (t) sieja lygybė $x = y \cdot z + t$. Sudarome lygtį $5z + 2 = 6(z - 3) + 1$, $z = 19$.

Ats.: **97.**

5. Sugalvojau skaičių tarp 20 ir 100. Jo skaitmenų suma dali iš 8, o patį skaičių dalijant iš 8, liekana 1. Koks tas skaičius?

S. Skaičius nelyginis, o skaitmenų suma lyginė. Todėl dešimčių skaitmuo irgi nelyginis. Patikrinę 33, 57, 73 ir 97, suskaičiuojame, kad paskutinis tinka.

Ats.: **97.**

6. 2019-aisiais metais šventčiau savo gimtadienį sekmadienį. Kokią savaitės dieną švęsiu jį 2119 metais?

P. Keliamieji metai su 366 dienomis būna kas ketveri metai.

S. Per 100 metų bus 25 keliamieji metai. Dalijant 365 iš 7, liekana 1, todėl dalijant 366 iš 7, liekana 2. Tuomet per 100 metų gimtadienis „pasislinks“ per 100 + 25 = 125 dienas. 126 dalu iš 7, tad dalijant 125 iš 7, liekana 6.

Ats.: **šeštadienį.**

7. Simboliu $n!$ (čia n yra natūralusis skaičius) žymima sandauga $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. Pvz., $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$. Įrodykite, kad
a) suma $54! + 55!$ dalijasi iš 57;
b) suma $57! + 58!$ dalijasi iš 59.

P. a) Išskaidykite 57 pirminiais dauginamaisiais; b) iškelkite bendrą sumos dauginamąjį prieš skliaustus.

S. a) $57 = 3 \cdot 19$. Kadangi abiejose sandaugose 54! ir 55! tarp dauginamųjų yra ir 3, ir 19, vadinasi, abi sandaugos dalios iš 57. Tuomet ir jų suma dali.

b) $57! + 58! = 57! \cdot (1 + 58) = 57! \cdot 59$. Akivaizdu, kad ši sandauga dali iš 59.

Kuriame Lietuvos ateitį
2014–2020 metų Europos Sąjungos fondų investicijų veiksmų programa