Šifražodžiai. D lygis

Svarbu

A lygio uždavinius galima skirti 3–4 klasių mokiniams, B lygio – 5–6 klasių, C lygio – 7–8 klasių, D ir E lygių – 9–10 klasių mokiniams. Tačiau toks skirstymas galioja, tik jei mokiniai prieš tai yra bandę spręsti tokio tipo uždavinių. O jei jie nėra tokių uždavinių sprendę, pradėkite nuo A lygio su bet kurios klasės mokiniais – tai leis dažniau patirti sėkmės jausmą bei pamėgti šiuos uždavinius. Juk šifražodžiai kaip ir burtažodžiai dvelkia paslaptimi, o paslaptys vilioja visus...

Beje, nemažai šių uždavinių atsakymų galima tiesiog atspėti. Tačiau šių modulių tikslas – lavinti loginį mąstymą bei lygčių ir jų sistemų sprendimą. (Net sprendimas variantų perrankos būdu leidžiamas tik tada, kai jis yra būtinas ar labai efektyvus!) Tad mėgstančiuosius spėlioti nuolat kreipkite link sprendimo pateikimo. Atspėtą atsakymą galima priimti tik kai kartu pagrindžiama, kad kitų sprendinių nėra, – tai ypač bus svarbu sprendžiant C ir D lygių uždavinius, kuriuose yra ne po vieną galimą atsakymą.

Pabaigus su mokiniais spręsti šiuos uždavinius, galite po savaitės kitos surengti jiems testą / olimpiadą – tam skirtas modulis su T raide.

Įžanga

Matematiniai galvosūkiai, kuriuose skaitmenys pakeisti raidėmis, vadintini šifražodžiais (iš angliško sudurtinio žodžio \`cryptarithm\` – \`crypto\` – užšifruota, paslėpta, \`arithm\` – iš žodžio aritmetika.) Sprendėjui reikia logiškai išmąstyti (iššifruoti, atkoduoti), kokį skaitmenį kokia raidė reiškia. Šio tipo uždaviniai kildinami iš senovės Kinijos – ten šis menas buvo vadinamas raidine arba žodine aritmetika. O štai viduramžiais Indijoje buvo išrasta uždavinių, kuriuose dauguma arba visi skaitmenys buvo pakeisti žvaigždutėmis. Šį \`skeletą\` reikėdavo užpildyti skaitmenimis, atkuriant pradinę lygybę.

Literatūroje anglų kalba galite rasti ir terminą \`alphametic\`, žymintį šifražodį, kuris sudarytas iš prasmingų žodžių (pvz.,
$$+\begin{array}{r}\text{SEND}\\ \text{MORE}\\ \hline \text{MONEY}\end{array}$$
)

O jei šifražodyje yra \`žodinių skaičių\`, kuriuos perskaičius, susidaro teisinga lygybė

$$(\text{pvz.,}\quad \begin{array}{lr} + & \text{SEVEN}\\ + & \text{SEVEN}\\ & \text{SIX}\\ \hline & \text{TWENTY}\end{array} \quad \text{arba} \quad \begin{array}{lr} + & \text{VIENAS}\\ + & \text{VIENAS}\\ + & \text{VIENAS}\\ & \text{DEVYNI}\\ \hline & \text{DVYLIKA}\end{array}\ )$$

ir tas šifražodis turi sprendinį, jis vadinamas \`dvigubai teisingas\` (angliškai \`doubly-true\`).

Sukurti savo šifražodį, ypač iš prasmingų žodžių, ganėtinai sunku. Kodėl? Todėl, kad bet kaip sulipdytas uždavinys arba neturės sprendinių, arba turės jų labai daug – abu šie atvejai nėra įdomūs. Kad būtų apribota paieškos sritis, galima įvesti papildomų apribojimų (ieškoti mažiausio arba didžiausio skaičiaus, arba tam tikrų skaitmenų sumos ir pan.) Norintiesiems pabandyti verta naudotis internete esančiais šifražodžių sprendikliais ir net generatoriais (kūrimo priemonė).

Šifražodžių sprendimo taisyklės

1. Vienodos raidės arba simboliai keičiamos vienodais skaitmenimis, o skirtingos raidės (skirtingi simboliai) – skirtingais.
2. Užrašyta lygybė turi išeiti teisinga.
3. Dviženkliai ir didesni skaičiai negali prasidėti nuliu.
4. Reikia rasti visus įmanomus iššifravimo būdus (nors dažniausiai bus lygiai 1).
5. Jei skaičiuose yra ir raidžių, ir skaitmenų, pvz., A1B2, po kažkuria raide gali „slėptis" 1 arba 2.

Patarimai

1. Blogiausia, ką galima daryti sprendžiant, – tai spėlioti. Antra pagal dydį blogybė – aklai perrinkinėti visus variantus.
2. Geriausia nustatyti, koks skaitmuo užšifruotas kuria nors viena raide, – tai gali atskleisti kitos raidės iššifravimą ir t. t.
3. Jeigu pavyksta nustatyti, kad tam tikra raidė gali būti, pavyzdžiui, skaitmuo 3 arba 2, šiuos abu variantus ir reikia patikrinti.
4. Nepamirškite, kad atliekant veiksmus gali atsirasti papildomas skaičius „mintyje"!

Gudrybės

1. Sudėtyje ieškokime 0 (nulio). Jei $+\begin{array}{r}\ldots B\\ \underline{\ldots A}\\ \ldots B\end{array}$ arba $+\begin{array}{r}\ldots A\\ \underline{\ldots A}\\ \ldots A\end{array}$, tai A tikrai lygus 0.
2. Jei sudedant 2 skaičius jų suma ilgesnė už ilgiausią iš dėmenų, tai sumos pirmas skaitmuo yra 1.
3. Jei pasitaiko situacija $+\begin{array}{r}xxAx\\ \underline{xxAx}\\ xxAx\end{array}$ arba $+\begin{array}{r}xxBx\\ \underline{xxAx}\\ xxBx\end{array}$,

   tai A gali būti arba 0, arba 9 (jei iš vienetų sumos ateina dar 1 „minty").
4. Sandaugoje tarp skaitmenų dauginamuosiuose verta ieškoti 1, 5 ir 6.

Atkoduokite pateiktus šifražodžius

D1.

$$\begin{array}{r} +\,ABC \\ ACB \\ \hline BCA \end{array}$$

P. Atkreipk dėmesį į dešimčių skiltį.

S. B tegali būti 0 arba 9, bet kadangi B yra sumos priekyje, tai lieka B = 9. Tuomet A = 4, o C = 5.

Ats.: $\begin{array}{r} +\,495 \\ 459 \\ \hline 954 \end{array}$

D2.

$$\begin{array}{r} \times\,ABCD \\ 9 \\ \hline DCBA \end{array}$$

P. Atkreipk dėmesį į sandaugos ir dauginamųjų dydžius.

S. Jei A būtų > 1, sandauga būtų penkiaženklė. Jei AB būtų > 11, vėlgi sandauga būtų penkiaženklė. Todėl B = 0, D = 9 ir 10C9 · 9 = 9C01. Dešimčių skiltyje 8 („minty“) + 9 · C baigiasi 0, taigi C = 8.

Ats.: $\begin{array}{r} \times\,1089 \\ 9 \\ \hline 9801 \end{array}$

D3.

$$\begin{array}{r} +\quad A \\ +\ AB \\ ABC \\ \hline BCB \end{array}$$

P. Sudaryk tris lygtis pagal tai, kas vyksta atitinkamai vienetų, dešimčių ir šimtų skiltyse.

S. B = A + 1, A + C = 10, A + B + 1 = 10 + C ⇒ 2 · A = C + 8 ⇒ 3 · A = 18.

Ats.: $\begin{array}{r} +\quad 6 \\ +\ 67 \\ 674 \\ \hline 747 \end{array}$

D4.

$$\begin{array}{r} +\,CAB \\ ABA \\ \hline BC0 \end{array}$$

P. Atkreipk dėmesį į vienetų skiltį.

S. A + B = 10, vadinasi, dešimtyse atsiranda 1 „minty“. Todėl C = 1. Šimtų skiltyje C + 1 + A = B ⇒ A + 2 = B.

Ats.: $\begin{array}{r} +\,146 \\ 464 \\ \hline 610 \end{array}$

D5. Buvo užrašyti du triženkliai skaičiai, vienas iš jų – natūraliojo skaičiaus kubas. Jų skaitmenys buvo paversti raidėmis, laikantis šifražodžių sudarymo taisyklių, todėl dabar užrašyta RIM TAS. Įrodykite, kad kitas skaičius nėra natūraliojo skaičiaus kubas.

P. O kokie yra triženkliai kubai?

S. Išsirašome visus triženklius kubus: 125, 216, 343, 512, 729. Skaičių 343 reikia atmesti, nes turi pasikartojančių skaitmenų, o žodžiai RIM ir TAS neturi pasikartojančių raidžių. Kiekviename iš likusių skaičių yra skaitmuo 2. Jei 2-etas jau yra viename iš jų, tai nebegali būti kitame ir tas antrasis nebegali būti kubas.

D6.

$$\begin{array}{r} \times\,ABA \\ B \\ \hline CC70 \end{array}$$

P. Kada sandauga gali baigtis 0 ?

S. Nei A, nei B negali būti lygus 0, todėl vienas iš jų turi būti 5, o kitas – lyginis. Jei A = 5, 5L5 · L = CC70 (čia L – lyginis skaitmuo), sprendinių nėra. Jei B = 5, L5L · 5 = CC70. Į dešimčių skiltį turi atkeliauti 2 „minty“ , todėl A = 4.

Ats.: $\begin{array}{r} \times\,\mathbf{454} \\ \mathbf{5} \\ \hline \mathbf{2270} \end{array}$

D7.

$$\begin{array}{r} \times\,ABB \\ 4 \\ \hline BBBC \end{array}$$

P. Kokio dydžio gali būti B? Ir atkreipk dėmesį į dešimčių skiltį.

S. ABB · 4 < 1000 · 4, todėl B < 4. Tačiau B · 4 turi būti > 9, nes kitaip sandaugos vienetų ir dešimčių skaitmuo būtų toks pats. Todėl B = 3, C = 2, o A = 8.

Ats.: $\begin{array}{r} \times\,\mathbf{833} \\ \mathbf{4} \\ \hline \mathbf{3332} \end{array}$

D8. I + HE + HE + HE + HE + HE + HE + HE + HE = US.

P. Kokio dydžio gali būti HE?

S. HE · 8 < 100, todėl HE < 13. Tačiau E negali būti = 0, nes I būtų lygus S. Lieka HE = 12. 96 + I = US, vadinasi I < 4. Bet I negali būti 3, nes U būtų lygus S. Skaitmenys 1 ir 2 yra „užimti“, tad lieka I = 0. SVARBU: I gali būti = 0, nes nėra dviženklio ar didesnio skaičiaus pirmasis skaitmuo.

Ats.: **0 + 8 · 12 = 96**.

D9. Buvo užrašyti penki tokie skaičiai, kad skirtumas tarp bet kurių gretimų skaičių buvo toks pats. Jų skaitmenys buvo paversti raidėmis, laikantis šifražodžių sudarymo taisyklių, todėl dabar užrašyta A, BC, BD, CE, FF. Atkurk pradinius skaičius.

P. Pradėk nuo antro ir trečio skaičių.

S. Antras ir trečias skaičiai yra toje pat dešimtyje, tad minėtas skirtumas (pavadinkime jį x) < 10. A + x < 20, todėl B = 1. Analogiškai C = 2, o F = 3. Turime A, 12, 1D, 2E, 33. Skirtumas tarp antro ir penkto skaičių lygus 3 · x = 33 – 12 , todėl x = 7.

Ats.: **5, 12, 19, 26, 33**.

D10.

$$\begin{array}{r} \times\,AAA \\ B \\ \hline CAAB \end{array}$$

P. Kokios galimos A ir B poros?

S. Kad A · B baigtųsi B, tinka A – nelyginis, o B = 5 arba A = 6, o B – lyginis (A = 1 netinka dėl sandaugos dydžio). Kiekvienam iš šių variantų randame po sprendinį.

Ats.: $\begin{array}{r} \times\,\mathbf{666} \\ \mathbf{4} \\ \hline \mathbf{2664} \end{array}$, $\begin{array}{r} \times\,\mathbf{999} \\ \mathbf{5} \\ \hline \mathbf{4995} \end{array}$

D11. Nustatykite raides I ir J, jei $A + B + C + D + E + F + G + H = IJ$.

P. Kiek skirtingų raidžių panaudota?

S. Kadangi panaudota 10 raidžių, tai bus panaudoti visi galimi skaitmenys. Jų visų suma lygi 45, todėl $A + B + C + D + E + F + G + H = 45 - (I + J)$. $45 - I - J = 10 \cdot I + J \Rightarrow 11 \cdot I + 2 \cdot J = 45$. Kadangi $2 \cdot J \leq 18$, tai tinkamas vienintelis variantas – $I = 3, J = 6$. (Kitas galimas sprendimo būdas remiasi tuo, kad jei $45 - I - J = IJ$, tai $IJ \equiv I + J \equiv 45 - I - J \pmod 9 \Rightarrow I + J \equiv 0 \pmod 9$, o tuo pačiu ir $IJ \equiv 0 \pmod 9$. Kadangi $28 \leq 45 - I - J \leq 44$, tai vienintelis tinkamas 9-eto kartotinis yra 36.)

Ats.: **I = 3, J = 6.**

D12.

$$\begin{array}{r} \times \,BAA \\ 4 \\ \hline CAAD \end{array}$$

P. Atkreipk dėmesį į dešimčių skiltį.

S. Dešimtyse $4 \cdot A +$ „minty“ = ..A, todėl $3 \cdot A +$ „minty“ = ..0. Galimos A reikšmės 3, 6, 9. Patikrinus tinka tik viena.

Ats.:

$$\begin{array}{r} \times \,\mathbf{499} \\ \mathbf{4} \\ \hline \mathbf{1996} \end{array}$$

D13. $G - A = L - V = O : S = Ū : K = I \cdot S$ (be to, $L > G$).

P. Po kuria raide gali „slėptis“ mažiausias galimas kiekis skaitmenų?

S. Iš $O : S = I \cdot S$ sužinome, kad $O = I \cdot S \cdot S$, todėl $I = 1$, o $S = 2$ arba 3.
Jei $S = 2$, tai $4 : 2 = 6 : 3 = 2 : 1$. Liko 0, 9, 8, 7 ir 5, nepavyksta sudaryti dviejų porų, kad abiejų skirtumai būtų 2. O jei $S = 3$, išsprendžiama vienareikšmiškai.

Ats.: $\mathbf{7 - 4 = 8 - 5 = 9 : 3 = 6 : 2 = 1 \cdot 3}$.
