Šifražodžiai. Baigiamasis testas

Svarbu

A lygio uždavinius galima skirti 3–4 klasių mokiniams, B lygio – 5–6 klasių, C lygio – 7–8 klasių, D ir E lygių – 9–10 klasių mokiniams. Tačiau toks skirstymas galioja, tik jei mokiniai prieš tai yra bandę spręsti tokio tipo uždavinių. O jei jie nėra tokių uždavinių sprendę, pradėkite nuo A lygio su bet kurios klasės mokiniais – tai leis dažniau patirti sėkmės jausmą ir pamėgti šiuos uždavinius. Juk šifražodžiai kaip ir burtažodžiai dvelkia paslaptimi, o paslaptys vilioja visus...

Beje, nemažai šių uždavinių atsakymų galima tiesiog atspėti. Tačiau šių modulių tikslas – lavinti loginį mąstymą bei lygčių ir jų sistemų sprendimą. (Net sprendimas variantų perrankos būdu leidžiamas tik tada, kai jis yra būtinas ar labai efektyvus!) Tad mėgstančiuosius spėlioti nuolat kreipkite link sprendimo pateikimo. Atspėtą atsakymą galima priimti tik kai kartu pagrindžiama, kad kitų sprendinių nėra, – tai ypač bus svarbu sprendžiant C ir D lygių uždavinius, kuriuose yra ne po vieną galimą atsakymą.

Pabaigus su mokiniais spręsti modulius A–E (ar bent dalį jų), galima po savaitės ar kelių surengti jiems testą / olimpiadą. Silpnesni mokiniai neprivalo spręsti TD–TE uždavinių, o pajėgesni – TA–TB uždavinių. Užuominų (patarimų) šiems uždaviniams nėra.

Galite naudotis pasiūlytomis vertinimo taisyklėmis (paskirti nurodytus taškus ir prašyti pateikti pilną sprendimą bent vienam uždaviniui) arba sukurti savas.

Įžanga

Matematiniai galvosūkiai, kuriuose skaitmenys pakeisti raidėmis, vadintini šifražodžiais (iš angliško sudurtinio žodžio `cryptarithm` – `crypto` – užšifruota, paslėpta, `arithm` – iš žodžio aritmetika.) Sprendėjui reikia logiškai išmąstyti (iššifruoti, atkoduoti), kokį skaitmenį kokia raidė reiškia. Šio tipo uždaviniai kildinami iš senovės Kinijos – ten šis menas buvo vadinamas raidine arba žodine aritmetika. O štai viduramžiais Indijoje buvo išrasta uždavinių, kuriuose dauguma arba visi skaitmenys buvo pakeisti žvaigždutėmis. Šį `skeletą` reikėdavo užpildyti skaitmenimis, atkuriant pradinę lygybę.

Literatūroje anglų kalba galite rasti ir terminą `alphametic`, žymintį šifražodį, kuris sudarytas iš prasmingų žodžių (pvz., $\begin{array}{r} +\ \text{SEND} \\ \text{MORE} \\ \hline \text{MONEY} \end{array}$)

O jei šifražodyje yra `žodinių skaičių`, kuriuos perskaičius, susidaro teisinga lygybė

(pvz., $\begin{array}{r} +\ \text{SEVEN} \\ +\ \text{SEVEN} \\ \text{SIX} \\ \hline \text{TWENTY} \end{array}$ arba $\begin{array}{r} +\ \text{VIENAS} \\ +\ \text{VIENAS} \\ +\ \text{VIENAS} \\ \text{DEVYNI} \\ \hline \text{DVYLIKA} \end{array}$)

ir tas šifražodis turi sprendinį, jis vadinamas `dvigubai teisingas` (angliškai `doubly-true`).

Sukurti savo šifražodį, ypač iš prasmingų žodžių, ganėtinai sunku. Kodėl? Todėl, kad bet kaip sulipdytas uždavinys arba neturės sprendinių, arba turės jų labai daug – abu šie atvejai nėra įdomūs. Kad būtų apribota paieškos sritis, galima įvesti papildomų apribojimų (ieškoti mažiausio arba didžiausio skaičiaus, arba tam tikrų skaitmenų sumos ir pan.). Norintiesiems pabandyti verta naudotis internete esančiais šifražodžių sprendikliais ir net generatoriais (kūrimo priemonė).

Šifražodžių sprendimo taisyklės

1. Vienodos raidės arba simboliai keičiamos vienodais skaitmenimis, o skirtingos raidės (skirtingi simboliai) – skirtingais.
2. Užrašyta lygybė turi išeiti teisinga.
3. Dviženkliai ir didesni skaičiai negali prasidėti nuliu.
4. Reikia rasti visus įmanomus iššifravimo būdus (nors dažniausiai bus lygiai 1).
5. Jei skaičiuose yra ir raidžių, ir skaitmenų, pvz., A1B2, po kažkuria raide gali „slėptis“ 1 arba 2.

Patarimai

1. Blogiausia, ką galima daryti sprendžiant, – tai spėlioti. Antra pagal dydį blogybė – aklai perrinkinėti visus variantus.
2. Geriausia nustatyti, koks skaitmuo užšifruotas kuria nors viena raide, – tai gali atskleisti kitos raidės iššifravimą ir t. t.
3. Jeigu pavyksta nustatyti, kad tam tikra raidė gali būti, pavyzdžiui, skaitmuo 3 arba 2, šiuos abu variantus ir reikia patikrinti.
4. Nepamirškite, kad atliekant veiksmus gali atsirasti papildomas skaičius „mintyje“!

Gudrybės

1. Sudėtyje ieškokime 0 (nulio). Jei $\begin{array}{r} +\ldots B \\ \underline{\ldots A} \\ \ldots B \end{array}$ arba $\begin{array}{r} +\ldots A \\ \underline{\ldots A} \\ \ldots A \end{array}$, tai A tikrai lygus 0.
2. Jei sudedant 2 skaičius jų suma ilgesnė už ilgiausią iš dėmenų, tai sumos pirmas skaitmuo yra 1.
3. Jei pasitaiko situacija $\begin{array}{r} +\,xxAx \\ \underline{xxAx} \\ xxAx \end{array}$ arba $\begin{array}{r} +\,xxBx \\ \underline{xxAx} \\ xxBx, \end{array}$

   tai A gali būti arba 0, arba 9 (jei iš vienetų sumos ateina dar 1 „minty“).
4. Sandaugoje tarp skaitmenų dauginamuosiuose verta ieškoti 1, 5 ir 6.

Testas / olimpiada

Atkoduokite pateiktus šifražodžius

1. Jei yra daugiau nei vienas galimas iššifravimo būdas – turite rasti visus.
2. Prie sunkiausio išspręsto uždavinio parašykite PILNĄ sprendimą, prie visų kitų – kokia tvarka nustatėte raides (pvz., A = 1, B = 9, C = 3 ar pan.).

A lygis

Už kiekvieną teisingai išspręstą uždavinį skiriama po **1 tašką**.

TA1. $\begin{array}{r} + \; AB \\ A \\ \hline BCC \end{array}$ Ats.: $\begin{array}{r} + \; 91 \\ 9 \\ \hline 100 \end{array}$

TA2. $\begin{array}{r} + \; AA \\ BB \\ \hline AAC \end{array}$ Ats.: $\begin{array}{r} + \; 11 \\ 99 \\ \hline 110 \end{array}$

TA3. $\begin{array}{r} + \; AB \\ BA \\ \hline CBC \end{array}$ Ats.: $\begin{array}{r} + \; 92 \\ 29 \\ \hline 121 \end{array}$

TA4. $\begin{array}{r} + \; AB \\ CB \\ \hline BBA \end{array}$ Ats.: $\begin{array}{r} + \; 21 \\ 91 \\ \hline 112 \end{array}$

TA5. $\begin{array}{r} + \; AA \\ AA \\ \hline CCB \end{array}$ Ats.: $\begin{array}{r} + \; 55 \\ 55 \\ \hline 110 \end{array}$

TA6. $\begin{array}{r} + \; AA \\ AA \\ \hline CAB \end{array}$ Ats.: $\begin{array}{r} + \; 99 \\ 99 \\ \hline 198 \end{array}$

B lygis

Už kiekvieną teisingai išspręstą uždavinį skiriama po **2 taškus**.

TB1. $\begin{array}{r} + \; AA \\ + \; BB \\ CC \\ \hline ABC \end{array}$

S. Iš dešimčių skilties aišku, kad B = 9 ir A + C = 9, o iš vienetų – kad A + B = 10.

Ats.: $\begin{array}{r} + \; 11 \\ + \; 99 \\ 88 \\ \hline 198 \end{array}$

TB2. $\begin{array}{r} + \; ABC \\ CBC \\ \hline CDEB \end{array}$

S. Aišku, kad C = 1, tuomet B = 2 ir E = 4. Lieka, kad A = 9, o D = 0.

Ats.: $\begin{array}{r} + \; 921 \\ 121 \\ \hline 1042 \end{array}$

TB3. $\begin{array}{r} \times \; AB \\ BA \\ \hline AB \\ + \; AAC \\ \hline ADEB \end{array}$

S. AB · A = AB, todėl A = 1. 1B · B = 11C ⇒ B = 7.

Ats.: $\begin{array}{r} \times \; 17 \\ 71 \\ \hline 17 \\ + \; 119 \\ \hline 1207 \end{array}$

TB4.

$$\begin{array}{r} + \quad A \\ \underline{ABB} \\ BCD \end{array}$$

S. Iš vienetų skyriaus galėjo ateiti daugiausiai 1 „minty“ į dešimtis. Bet į šimtų skyrių irgi turėjo ateiti 1 „minty“, kad A pasikeistų į B. Vadinasi, B, vienintelis esantis dešimčių skyriuje, turi būti 9. Tuomet A = 8, C = 0, o D = 7.

Ats.: $$\begin{array}{r} + \quad \mathbf{8} \\ \underline{\mathbf{899}} \\ \mathbf{907} \end{array}$$

C lygis

Už kiekvieną teisingai išspręstą uždavinį skiriama po **3 taškus**.

TC1.

$$\begin{array}{r} + AB \\ \underline{AB} \\ BC \end{array}$$

S. C – lyginis, reikia perrinkti visus variantus.

Ats.: $\begin{array}{r} + \mathbf{12} \\ \underline{\mathbf{12}} \\ \mathbf{24} \end{array}$, $\begin{array}{r} + \mathbf{24} \\ \underline{\mathbf{24}} \\ \mathbf{48} \end{array}$, $\begin{array}{r} + \mathbf{25} \\ \underline{\mathbf{25}} \\ \mathbf{50} \end{array}$, $\begin{array}{r} + \mathbf{37} \\ \underline{\mathbf{37}} \\ \mathbf{74} \end{array}$, $\begin{array}{r} + \mathbf{49} \\ \underline{\mathbf{49}} \\ \mathbf{98} \end{array}$.

Už kiekvieną surastą sprendinį – **po 0,6 taško**.

TC2.

$$\begin{array}{r} \times \quad AB \\ \underline{B} \\ AAC \end{array}$$

S. B > 5 (kitaip sandaugoje nebūtų A šimtų), be to, B · B baigiasi ne B. Reikia perrinkti visus variantus (B = 7, 8, 9).

Ats.: $\begin{array}{r} \times \quad \mathbf{17} \\ \underline{\mathbf{7}} \\ \mathbf{119} \end{array}$, $\begin{array}{r} \times \quad \mathbf{28} \\ \underline{\mathbf{8}} \\ \mathbf{224} \end{array}$, $\begin{array}{r} \times \quad \mathbf{49} \\ \underline{\mathbf{9}} \\ \mathbf{441} \end{array}$.

Už kiekvieną surastą sprendinį – **po 1 tašką**.

TC3.

$$\begin{array}{r} \times \quad ABA \\ \underline{5} \\ CDBA \end{array}$$

S. A · 5 baigiasi A, tik kai A = 5 (nulis skaičiaus pradžioje būti negali). 2500 < 5B5 · 5 < 3000, todėl C = 2. B5 · 5 baigiasi B5, tik kai B = 2 arba 7.

Ats.: $$\begin{array}{r} \times \quad \mathbf{575} \\ \underline{\mathbf{5}} \\ \mathbf{2875} \end{array}$$

TC4. Kokiu skaitmeniu baigiasi sandauga V · I · L · N · I · U · S , jei žinoma, kad AA + A = BCD? (Čia, kaip ir visuose šifražodžiuose, vienodos raidės keičiamos vienodais skaitmenimis, o skirtingos – skirtingais.)

S. AA + A = BCD nesunkiai atkoduojame: 99 + 9 = 108. Iš viso yra 10 skirtingų skaitmenų, keturi jau „užimti“. Tarp šešių skirtingų žodžio VILNIUS raidžių viena būtinai reikš 5, o kita – 2. Todėl jų sandauga baigsis 0 (kaip, beje, ir visa sandauga).

Ats.: **nuliu**.

D lygis

Už kiekvieną teisingai išspręstą uždavinį skiriama po **4 taškus**.

TD1.

$$\begin{array}{r} \times\, ABCD \\ 4 \\ \hline DCBA \end{array}$$

S. D · 4 baigiasi A, todėl A – lyginis, taigi = 2 (jei būtų didesnis – sandauga būtų penkiaženklė). D tiktų 3 arba 8, bet 2BCD · 4 > 7000, tad D = 8. BC · 4 + 3 = CB. B nelyginis, todėl 1 (3 būtų per daug). 1C · 4 + 3 = C1 ⇒ C = 7.

Ats.:

$$\begin{array}{r} \times\, \mathbf{2178} \\ \mathbf{4} \\ \hline \mathbf{8712} \end{array}$$

TD2.

$$\begin{array}{r} +\; A \\ +\; BB \\ CCC \\ \hline BAB \end{array}$$

S. Iš vienetų skilties aišku, kad A + C = 10, iš šimtų – B = C + 1, iš dešimčių – B + C + 1 = 10 + A. Išsprendę lygčių sistemą, randame atsakymą.

Ats.:

$$\begin{array}{r} +\; \mathbf{4} \\ +\; \mathbf{77} \\ \mathbf{666} \\ \hline \mathbf{747} \end{array}$$

TD3. Buvo užrašyti šeši tokie skaičiai, kad skirtumas tarp bet kurių gretimų skaičių buvo toks pats. Jų skaitmenys buvo paversti raidėmis, laikantis šifražodžių sudarymo taisyklių, todėl dabar užrašyta A, BC, DEF, CGH, CBE, EKG. Atkurk pradinius skaičius.

S. Aišku, kad minėtas skirtumas < 100. Todėl paeiliui aiškėja D = 1, C = 2, E = 3, tad turime A, B2, 13F, 2GH, 2B3, 3KG. Skirtumas tarp antro ir penkto 201, todėl tarp gretimų skirtumas 201 : 3 = 67. F = 9 ir t. t.

Ats.: **5**, **72**, **139**, **206**, **273**, **340**.

E lygis

Už teisingai išspręstą uždavinį skiriami **5 taškai**.

TE1.

$$\begin{array}{r} \times\, ABCDE \\ 12 \\ \hline CDE0AB \end{array}$$

S. Pažymime AB = x, CDE = y. 12 · (1000x + y) = 1000y + x ⇒ 11999x = 988y ⇒ 923x = 76y. Kairė lygties pusė dali iš 923, tai ir dešinė turi būti dali. Bet 76 tarpusavyje pirminis su 923, vadinasi, y dalus iš 923. Bet y triženklis, taigi y = 923, o x = 76.

Ats.:

$$\begin{array}{r} \times\, \mathbf{76923} \\ \mathbf{12} \\ \hline \mathbf{923076} \end{array}$$

Kuriame Lietuvos ateitį
2014–2020 metų Europos Sąjungos fondų investicijų veiksmų programa