Funkcinės lygtys. A lygis

Įvadas

Norint nagrinėti funkcinių lygčių sprendimo temą, reikia prisiminti keletą sąvokų ir teiginių iš mokyklinio matematikos kurso.

Apibrėžimas. Tarkime, X ir Y yra dvi aibės. Funkcija – tai dėsnis (taisyklė), pagal kurią kiekvienam aibės X elementui priskiriamas vienintelis Y aibės elementas.

Apibrėžimas. Tarkime, kad funkcijos f apibrėžimo sritis simetriška nulio atžvilgiu, t. y. jei $x \in X$, tai ir $-x \in X$. Funkcija, tenkinanti šio apibrėžimo sąlygą $f(-x) = f(x)$, vadinama lygine, o $f(-x) = -f(x)$ – nelygine.

Apibrėžimas. Funkcija f vadinama periodine, jei egzistuoja toks $T \neq 0$, kad su kiekvienu x iš apibrėžimo srities skaičiai $x - T$ ir $x + T$ taip pat priklauso apibrėžimo sričiai ir galioja lygybė $f(x + T) = f(x)$. Skaičius T vadinamas funkcijos f periodu.

Apibrėžimas. Funkciją f: A → B vadinsime monotonine, jei ji yra arba nedidėjanti, arba nemažėjanti, t. y. arba $f(x) \leq f(y)$ su visais $x > y$ ($x, y \in A$), arba $f(x) \geq f(y)$ su visais $x > y$ ($x, y \in A$).

Apibrėžimas. Funkcija f: X → Y vadinama injektyviąja, arba injekcija, jeigu su visais $x_1, x_2 \in X$ ir $y \in Y$. Jei $f(x_1) = y$ ir $f(x_2) = y$, tai išeina, kad $x_1 = x_2$ (jei su visais x_1, x_2 ir $x_1 \neq x_2$ turime $f(x_1) \neq f(x_2)$).

Apibrėžimas. Funkcija f: X → Y vadinama surjektyviąja, arba surjekcija, jeigu bet kuriam $y \in Y$ egzistuoja toks $x \in X$, kad $f(x) = y$.

Apibrėžimas. Funkcija f: X → Y vadinama bijektyviąja, arba bijekcija, jeigu ji yra ir injektyvi, ir surjektyvi.

Pagrindiniai funkcinių lygčių sprendimo metodai:

1. Keitimo metodas.
2. Manipuliavimo funkcijos apibrėžimo sritimi metodas.
3. Funkcijos pagrindinių savybių – injektyvumo arba surjektyvumo – panaudojimo metodas.
4. Neapibrėžtų koeficientų metodas.
5. *Koši* funkcinės lygties metodas.

I. Keitimo metodas

Populiariausias yra keitimo metodas, tačiau tikrai ne pats lengviausias. Šio metodo esmė yra kintamojo keitimas konstanta, kitu kintamuoju ar reiškiniu, taip sudarant lygčių sistemą, kuri susideda iš pradinės lygties ir pakeistosios. Dažniausiai funkcinės lygties kintamieji keičiami $x \to 0$, $x \to 1$, $x \to -1$, $x \to -x$, $x \to \frac{1}{x}$, $x \to k \cdot y$.

1 pavyzdys.

Raskite visas funkcijas $f: R \to R$, tenkinančias lygtį $f(x - 7) = x^2 - 5x + 2$, kai $x \in R$.

Sprendimas. Pažymėję $t = x - 7$ ir įstatę į pradinę lygtį, turime $f(t) = (t + 7)^2 - 5(t + 7) + 2, \Longrightarrow f(t) = t^2 + 9t + 16$. Taigi $f(x) = x^2 + 9x + 16$. Patikrinę nustatome, kad gautoji funkcija $f(x) = x^2 + 9x + 16$ yra pradinės lygties sprendinys.

Atsakymas – $f(x) = x^2 + 9x + 16$.

2 pavyzdys.

Raskite visas funkcijas $f: R \to R$, tenkinančias lygtį $f(\frac{1}{x}) = x + 5f(x)$, kai $x \in R$, $x \neq 0$.

Sprendimas. Atlikę keitinį $x \to \frac{1}{x}$, sudarome lygčių sistemą: $\begin{cases} f(\frac{1}{x}) = x + 5f(x), \\ f(x) = 1/x + 5f(\frac{1}{x}). \end{cases}$

Išsprendę šią lygčių sistemą, matome, kad $f(x) = -\frac{1}{24x} - \frac{5}{24}x$. Patikrinę nustatome, kad gautoji funkcija $f(x) = -\frac{1}{24x} - \frac{5}{24}x$. yra pradinės lygties sprendinys.

Atsakymas – $f(x) = -\frac{1}{24x} - \frac{5}{24}x$.

3 pavyzdys.

Raskite visas funkcijas $f\colon R \to R$, tenkinančias lygtį $x\,(f(x) + f(-x) + 4) + 2f(x) + 2 = 0$, kai $x \in R$.

Sprendimas. Atlikę keitinį $x \to -x$, sudarome lygčių sistemą:

$$\begin{cases} x\,(f(x) + f(-x) + 4) + 2f(x) + 2 = 0, \\ -x\,(f(-x) + f(x) + 4) + 2f(-x) + 2 = 0. \end{cases}$$

Sudėję abi sistemos lygtis, turime lygtį $2f(x) + 2f(-x) + 4 = 0$, $\Longrightarrow f(-x) = -f(x) - 2$. Įrašius ją į (1) sistemos lygtį, išeina, kad $x\,(f(x) + (-f(x) - 2) + 4) + 2f(x) + 2 = 0$, $\Longrightarrow$, $2x + 2f(x) + 2 = 0$, $\Longrightarrow f(x) = -x - 1$. Patikrinę nustatome, kad gautoji funkcija $f(x) = -x - 1$ yra pradinės lygties sprendinys.

Atsakymas – $f(x) = -x - 1$.

4 pavyzdys.

Raskite visas funkcijas $f\colon R \to R$, tenkinančias lygtį $2f(x) + 3f(1 - x) = 5x$, kai $x \in R$.

Sprendimas. Atlikę keitinį $x \to 1 - x$, turime lygtį $3f(x) + 2f(1 - x) = 5 - 5x$. Sudarome lygčių sistemą:

$$\begin{cases} 2f(x) + 3f(1 - x) = 5x, \\ 2f(1 - x) + 3f(x) = 5(1 - x). \end{cases}$$

Pirmąją lygtį dauginame iš dviejų, o antrąją – iš trijų. Iš pirmos lygties atėmę antrą, turime $9f(x) - 4f(x) = 15 - 15x - 10x$, $\Longrightarrow 5f(x) = 15 - 25x$, $\Longrightarrow f(x) = 3 - 5x$.

Patikrinę darome išvadą, kad ši funkcija tenkina lygtį.

Atsakymas – $f(x) = 3 - 5x$.

5 pavyzdys.

Raskite visas funkcijas $f\colon R \to R$ tokias, kad visiems teigiamiems x, y galiotų lygybė $f(x - y) = f(x) + y$, kai $x, y \in R$.

Sprendimas. Atlikę keitinį $y \to x$, turime $f(0) = f(x) + x$, taigi teigiamiems x galioja lygybė $f(x) = -x + f(0)$. Įrodysime, kad lygybė galioja, kai x yra neigiamas skaičius.

Atlikę keitinį $y \to 2x$, turime $f(-x) = f(x) + 2x$, $\Longrightarrow$ f(-x)= $(-x + f(0)) + 2x = x + f(0)$, taigi ir su neigiamais skaičiais x galioja lygybė $f(x) = -x + f(0)$. Reikia surasti $f(0)$. Pasižymėję $f(0) = c$, turime $f(x) = -x + c$. Įstatę funkciją $f(x) = -x + c$ į pradinę lygtį, turime $y - x + c = -x + c + y$. Taigi c gali būti bet kuris realusis skaičius, todėl $f(x) = -x + c$, $c \in R$ yra lygties sprendinys.

Atsakymas – f $(x) = -x + c$.

Uždaviniai

1. Išspręskite funkcinę lygtį $f(x - y) = f(x)f(y)$, kai $f(x) \neq 0$ ir $x, y \in R$.

P. Nuosekliai atlikite keitinius $x \to x + y$, $y \to$ x, $y \to 0{,}5x$.

2. Raskite funkciją $f(x)$, kai $f\left(\frac{x}{x+1}\right) = x^2$.

P. Atlikite keitinį x $\to \left(\frac{x}{1-x}\right)$.

3. Raskite visas funkcijas f: $R \setminus \{0,1\} \to R$, tenkinančias lygybę $f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{2(1-2x)}{x(1-x)}$, $x \in R$, $x \neq 0$, $x \neq 1$.

P. Du kartus atlikite keitinį x $\to \left(\frac{x}{1-x}\right)$.

4. Išspręskite funkcinę lygtį $f: (x + y) + f(x - y) = f(3x)$, kai $x, y \in \mathrm{Z}^+$, $x \geq y$.

P. Nuosekliai atlikite keitinius $x \to 0$ ir $y \to 0$, $y \to x$, $y \to 2x$.

5. Raskite visas funkcijas f: R → R, tenkinančias lygybę $f(f(x - y)) = f(x) - f(y)$, kai $x, y \in$ R, kai $f(x)$ reikšmių sritis sutampa su realiųjų skaičių aibe.

P. Nuosekliai atlikite keitinius $y \to 0$, $y \to 1$.

Uždavinių sprendimas keitimo metodu

1 pavyzdys.

Išspręskite funkcinę lygtį $f(x - y) = f(x)f(y)$, kai $f(x) \neq 0$.

Sprendimas. Atlikę keitinį $x \to x + y$, turime $f(x) = f(x + y) \cdot f(y)$. Atlikę keitinį $y \to x$, turime $f(x) = f(2x) \cdot f(x) \Rightarrow f(x)(f(2x) - 1) = 0$. Kadangi $f(x) \neq 0$, tai $f(2x) - 1 = 0$, $\Rightarrow f(2x) = 1$. Atlikę keitinį $x \to 0{,}5x$, turime $f(x) = 1$.

Patikrinę darome išvadą, kad ši funkcija tenkina lygtį.

Atsakymas – $f(x) = 1$.

2 pavyzdys.

Raskite lygties $f\left(\frac{x}{x+1}\right) = x^2$ sprendinį.

Sprendimas. Atlikę keitinį $x \to \left(\frac{x}{1-x}\right)$, turime $f\left(\frac{x}{(1-x)\left(\frac{x}{1-x}+1\right)}\right) = \left(\frac{x}{1-x}\right)^2$; $f\left(\frac{x}{1}\right) = \left(\frac{x}{1-x}\right)^2$.

Taigi $f(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)^2$.

Patikrinę darome išvadą, kad funkcija $f(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)^2$ tenkina lygtį.

Atsakymas – $f(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)^2$.

3 pavyzdys.

Raskite visas funkcijas f: R \ {0,1} → R, tenkinančias lygybę $f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = \left(\frac{2(1-2x)}{x(1-x)}\right)$, $x \neq 0$, $x \neq 1$. **(1)**

Sprendimas. Atlikę keitinį $x \to \left(\frac{1}{1-x}\right)$, turime $f\left(\frac{1}{1-x}\right) + f\left(1 - \frac{1}{x}\right) = 2\frac{(x+1)(1-x)}{x}$. **(2)**

Dar kartą atlikę keitinį $x \to \left(\frac{1}{1-x}\right)$, turime $f\left(1 - \frac{1}{x}\right) + f(x) = \frac{2(x-2)x}{1-x}$. **(3)**

Sudėję **(1)**, **(3)** ir atėmę iš jų **(2)**, turime $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$. Patikrinę nustatome, kad gautoji funkcija $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ tenkina pradinę lygybę.

Atsakymas – $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$.

4 pavyzdys.

Išspręskite funkcinę lygtį $f(x + y) + f(x - y) = f(3x)$, kai $x, y \in \mathrm{Z}^+$, $x \geq y$.

Sprendimas. Nuosekliai atlikę keitinius $x \to 0$, $y \to 0$, turime $f(0) = 0$. Pakeitę $y \to 0$, turime $f(3x) = 2f(x)$ ir, pakeitę $y \to x$, turime $f(2x) = f(3x) = 2f(x)$. Pakeitę $x \to 2y$, turime $f(6y) = f(3y) + f(y) = 2f(y) + f(y) = 3f(y)$. Kita vertus, $f(6y) = f(2 \cdot 3y) = 2f(3y) = 2 \cdot 2f(y)$. Vadinasi, $3f(y) = 4f(y)$, t. y. $f(y) = 0$, $\Rightarrow f(x) = 0$.

Patikrinę darome išvadą, kad ši funkcija tenkina lygtį.

Atsakymas – $f(x) = 0$.

5 pavyzdys.

Raskite visas funkcijas f: R → R, tenkinančias lygybę $f(f(x - y)) = f(x) - f(y)$, kai x, $y \in$ R, kai $f(x)$ reikšmių sritis sutampa su realiųjų skaičių aibe.

Sprendimas. Nuosekliai atlikę keitinį $y \to 0$, turime $f(f(x))= f(x) - f(0)$. Kadangi funkcijos reikšmių sritis sutampa su realiųjų skaičių aibe, tai atlikę keitinį $f(x) \to x$, turime $f(x) = x - a$, kur $a = f(0)$. Surasime galimas a reikšmes. Atlikę keitinį $x \to f(x - y)$, turime $f(f(x - y) = f(x - y) - a = (x - y) - a - a = x - y - 2a$. Taip pat $f(x) - f(y) = x - a - (y - a) = x - y$. Taigi $x - y - 2a = x - y \Longrightarrow a = 0$. Patikrinę darome išvadą, kad ši funkcija $f(x)$ = x tenkina lygtį.

Atsakymas – $f(x) = x$.