Funkcinės lygtys. C lygis

Įvadas

Norint nagrinėti funkcinių lygčių sprendimo temą, reikia prisiminti keletą sąvokų ir teiginių iš mokyklinio matematikos kurso.

Apibrėžimas. Tarkime, X ir Y yra dvi aibės. Funkcija – tai dėsnis (taisyklė), pagal kurią kiekvienam aibės X elementui priskiriamas vienintelis Y aibės elementas.

Apibrėžimas. Tarkime, kad funkcijos f apibrėžimo sritis simetriška nulio atžvilgiu, t. y. jei $x \in X$, tai ir $-x \in X$. Funkcija, tenkinanti šio apibrėžimo sąlygą $f(-x) = f(x)$, vadinama lygine, o $f(-x) = -f(x)$ – nelygine.

Apibrėžimas. Funkcija f vadinama periodine, jei egzistuoja toks $T \neq 0$, kad su kiekvienu x iš apibrėžimo srities skaičiai $x - T$ ir $x + T$ taip pat priklauso apibrėžimo sričiai ir galioja lygybė $f(x + T) = f(x)$. Skaičius T vadinamas funkcijos f periodu.

Apibrėžimas. Funkciją f: A → B vadinsime monotonine, jei ji yra arba nedidėjanti, arba nemažėjanti, t. y. arba $f(x) \leq f(y)$ su visais $x > y$ ($x, y \in$ A), arba $f(x) \geq f(y)$ su visais $x > y$ ($x, y \in$ A).

Apibrėžimas. Funkcija f: X → Y vadinama injektyviąja, arba injekcija, jeigu su visais $x_1, x_2 \in X$ ir $y \in Y$. Jei $f(x_1) = y$ ir $f(x_2) = y$, tai išeina, kad $x_1 = x_2$ (jei su visais x_1, x_2 ir $x_1 \neq x_2$ turime $f(x_1) \neq f(x_2)$).

Apibrėžimas. Funkcija f: X → Y vadinama surjektyviąja, arba surjekcija, jeigu bet kuriam $y \in Y$ egzistuoja toks $x \in X$, kad $f(x) = y$.

Apibrėžimas. Funkcija f: X → Y vadinama bijektyviąja, arba bijekcija, jeigu ji yra ir injektyvi, ir surjektyvi.

Pagrindiniai funkcinių lygčių sprendimo metodai:

1. Keitimo metodas.
2. Manipuliavimo funkcijos apibrėžimo sritimi metodas.
3. Funkcijos pagrindinių savybių – injektyvumo arba surjektyvumo – panaudojimo metodas.
4. Neapibrėžtų koeficientų metodas.
5. *Koši* funkcinės lygties metodas.

III. Funkcijos pagrindinių savybių – injektyvumo arba surjektyvumo – panaudojimo metodas

Injektyvios funkcijos pavyzdžiai: $f(x) = ax + b$, $f(x) = ax^3$, $f(x) = a/x$, $f(x) = ae^x$, $a \neq 0$. Neinjektyvios funkcijos pavyzdžiai: $f(x) = ax^2$, $f(x) = ax^3 + bx$, $a \neq 0$, $b \neq 0$.

1 pavyzdys.

Funkcija f: R → R tenkina lygtį $f(f(x)) = x$. Įrodykite, kad $f(x)$ yra injekcija.

Sprendimas. Jei $f(a) = f(b)$, tai įrodysime, kad $a = b$. Jei $f(a) = f(b)$, tai ir $f(f(a)) = f(f(b))$. Kadangi $f(f(a)) = a$ ir $f(f(b)) = b$, tai $a = b$.

Atsakymas – funkcija $f(x)$ yra injekcija.

2 pavyzdys.

Funkcija f: R → R tenkina lygtį $f(f(x)) = x$. Įrodykite, kad funkcija yra surjekcija.

Sprendimas. Įrodysime, kad kiekvienam skaičiui b egzistuoja toks a, kad $f(a) = b$. Vietoj x įrašę b gauname $f(f(b)) = b$, t. y. funkcija $f(x)$ su tam tikra argumento reikšme įgyja skaičių b.

Atsakymas – funkcija $f(x)$ yra surjekcija.

3 pavyzdys.

Raskite visas funkcijas $f\colon R \to R$, tenkinančias lygtį $f(f(x)) = f(x)$.

Sprendimas. Įrodome, kad funkcija yra injekcija (1 pavyzdys). Kadangi funkcija yra injekcija, tai iš lygybės $f(a) = f(b)$ turime, kad $a = b$ su visais $a, b \in R$. Lygybėje $f(a) = f(b)$ pakeitę a į $f(x)$, o b į x, gauname $f(f(x)) = f(x) \Rightarrow f(x) = x$, kai $x \in R$.

Atsakymas – funkcija $f(x) = x$, kai $x \in R$.

4 pavyzdys.

Raskite visas funkcijas $f\colon R \to R$, tenkinančias lygtį $f(f(x)) = f(x)$.

Sprendimas. Parodome, kad funkcija yra surjekcija (2 pavyzdys). Surjektyvi funkcija įgyja visas funkcijos reikšmių srities reikšmes, taigi, pažymėję $f(x) = y$, turime $f(y) = y$. Vadinasi, $f(x) = x$, kai $x \in R$.

Atsakymas – funkcija $f(x) = x$, kai $x \in R$.

5 pavyzdys.

Raskite visas funkcijas $f\colon R \to R$, tenkinančias lygtį $f(x + f(y)) = f(f(x) + y)$.

Sprendimas. Jei žinotume, kad funkcija yra injekcija, iš karto turėtume $f(x + f(y)) = f(f(x) + y) \Rightarrow x + f(y) = f(x) + y$, o tokią lygtį jau mokėsime spręsti. Užtenka įsistatyti, pavyzdžiui, $y = 0$ ir gauti $f(x) = x + c$, kur c bet koks realusis skaičius. Patikrinę matome, kad ši funkcija $f(x) = x + c$ tenkina lygtį su visomis realiosiomis c reikšmėmis.

Atsakymas – $f(x) = x + c$, kai $c \in R$.

Uždaviniai

1. Funkcija $f\colon R \to R$ tenkina lygtį $f(x + f(y)) = f(x) + y$. Įrodykite, kad funkcija $f(x)$ yra injekcija.

P. Pasinaudokite laisvuoju kintamuoju y.

2. Funkcija $f\colon R \to R$ tenkina lygtį $f(x + f(y)) = f(x) + y$. Įrodykite, kad funkcija $f(x)$ yra surjekcija.

P. Pasinaudokite laisvuoju kintamuoju y ir įstatykite į lygtį $x = 0$.

3. Funkcija $f\colon R \to R$ tenkina lygtį $f(f(x) + x) = x$. Raskite $f(0)$.

P. Įrodykite, kad funkcija $f(x)$ yra surjektyvi.

4. Funkcijos $f\colon R \to R$ tenkina lygtį $x + f(x) = f(f(x))$, kai $x \in R$. Raskite lygties $f(f(x)) = 0$ sprendinius.

P. Įrodykite, kad funkcija $f(x)$ yra injektyvi.

5. Funkcijos $f\colon Q \to Q$ visiems racionaliesiems x, y tenkina lygtį $f(x + y) = f(x) + f(y)$. Įrodykite, kad $f(rx) = rf(x)$, kai r – racionalusis skaičius.

P. Įrodykite lygybės teisingumą, kai $r \in N$, $r = \frac{1}{n}$, $r = \frac{p}{q}$, kai $p \in Z$, $q \in N$.

1 uždavinys.

Funkcija f: R → R tenkina lygtį $f(x + f(y)) = f(x) + y$, kai $x, y \in$ R.

Įrodykite, kad funkcija $f(x)$ yra injekcija.

Sprendimas. Mums reikia įrodyti, kad jei $f(a) = f(b)$, tai $a = b$. Pasinaudosime laisvuoju kintamuoju y: perrašę lygtį $y = f(x + f(y)) - f(x)$ ir vietoje y paeiliui įrašę a ir b turime, kad dešiniosios pusės bus vienodos, $(f(a) = f(b))$, todėl vienodos turės būti ir kairiosios. Vadinasi, funkcija $f(x)$ yra injekcija.

Atsakymas – funkcija $f(x)$ yra injekcija.

2 uždavinys.

Funkcija f: R → R tenkina lygtį $f(x + f(y)) = f(x) + y$. Įrodykite, kad funkcija $f(x)$ yra surjekcija.

Sprendimas. Turime įrodyti, kad funkcija įgyja visas reikšmes. Laisvasis kintamasis y gali įgyti bet kokią reikšmę. Į lygtį vietoje x įrašę 0 turėsime $f(f(y)) = f(0) + y$.

Kadangi $f(0)$ yra skaičius, o y įgyja visas reikšmes, tai ir $f(0) + y$ įgyja visas reikšmes. Vadinasi, funkcija $f(x)$ taip pat įgis visas reikšmes.

Atsakymas – funkcija $f(x)$ yra surjekcija.

3 uždavinys.

Funkcija f: R → R tenkina lygtį $f(f(x) + x) = x$. Raskite $f(0)$.

Sprendimas. Matome, kad funkcija f yra surjektyvi, nes egzistuoja toks skaičius a, kad $f(a) = 0$ (kitaip sakant, nulis yra įgyjamas). Įstatę $x = a$, turėtume $f(f(a) + a) = a \Rightarrow f(0 + a) = a \Rightarrow$, vadinasi, $a = 0$, tai yra $f(0) = 0$.

Atsakymas – funkcija $f(0) = 0$.

4 uždavinys.

Funkcijos f: R → R tenkina lygtį $x + f(x) = f(f(x))$, kai $x \in$ R. Raskite lygties $f(f(x)) = 0$ sprendinius.

Sprendimas. Kadangi $f(f(x)) - f(x) = x$, tai $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$. Vadinasi, funkcija yra injekcija, $f(f(0))= f(0) + 0 = f(0) \Rightarrow f(0) = 0$. Jei būtų dar tokia x reikšmė, su kuria $f(f(x)) = 0 = f(f(0))$, tai $f(x) = f(0) \Rightarrow x = 0$.

Atsakymas – $x = 0$.

5 uždavinys.

Funkcijos f: Q → Q visiems racionaliesiems x, y tenkina lygtį $f(x + y) = f(x) + f(y)$. Įrodykite, kad $f(rx) = rf(\mathrm{x})$, kai r – racionalusis skaičius.

Sprendimas. Įrodysime lygybės $f(rx) = rf(x)$ teisingumą:

a) kai r – natūralusis skaičius. Taikydami matematinės indukcijos principą įrodome, kad $f(nx) = nf(x)$. Akivaizdu, kad lygybė teisinga, kai $n = 1$. Tarkime, kad lygybė teisinga, kai $n = k$, $f(kx) = kx$. Įrodysime jos teisingumą, kai $n = k + 1$. $f((k+1)x) = f(kx + x) = f(kx) + f(x) = kf(x) + f(x) = (k + 1)f(x)$. Taigi, lygybė yra teisinga.

b) kai $r - \frac{1}{n}$ (n natūralusis skaičius). Patikrinsime lygybės $f(\frac{x}{n}) = \frac{1}{n}f(x)$ teisingumą, kai $r = \frac{1}{n}$. Padauginę lygybę iš n turime $nf(\frac{x}{n}) = n\cdot\frac{1}{n}f(x) = f(x) = f(n \cdot \frac{x}{n})$.

c) kai r teigiamas racionalusis skaičius. Paėmę $p \in Z$, $q \in N$ gauname $f(\frac{p}{q}x) = f(p\frac{x}{q}) = pf(\frac{x}{q}) = \frac{p}{q}\ f(x)$.

d) kai r neigiamas racionalusis skaičius. Apskaičiuosime $f(0)$ reikšmę. Atlikę pakeitimus $x \to 0$, y → 0, turime $f(0 + 0) = f(0) + f(0) = f(0) \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x) = 0, \Rightarrow f(-x) = -f(x)$. Lygybė $f(\text{-}rx) = -f(rx) = -\mathrm{r}f(x) \Rightarrow f(-rx) = -rf(x)$ yra teisinga, kai r – neigiamas racionalusis skaičius.

Atsakymas – lygybė $f(rx) = rf(x)$ yra teisinga, kai r – racionalusis skaičius.

Kuriame Lietuvos ateitį
2014–2020 metų Europos Sąjungos fondų investicijų veiksmų programa

Specialieji moduliai parengti įgyvendinat Nacionalinės švietimo agentūros projektą „Mokinių akademinių gebėjimų atpažinimo ir jų ugdymo kokybės plėtra“.