Matematinė indukcija. A dalis

Įvadas

Pilnoji ir nepilnoji indukcija

Žodis *indukcija* reiškia samprotavimus, kai, remiantis atskirais teiginiais, daromos bendros išvados. Pilnąja indukcija vadinamas įrodymo metodas, kai teiginys patikrinamas, išnagrinėjus baigtinį skaičių atvejų, kuriais išsemiamos visos galimybės.

Pavyzdys.

Reikia įrodyti, kad kiekvieną natūralųjį lyginį skaičių n ($3 < n < 101$) galima išreikšti dviejų pirminių skaičių suma. Visi nagrinėjami skaičiai išdėstomi atitinkamai:

$$4 = 2 + 2,$$
$$6 = 3 + 3,$$
$$8 = 5 + 3,$$
$$10 = 7 + 3,$$
....
$$98 = 93 + 5,$$
$$100 = 97 + 3.$$

Šios 49 lygybės rodo, kad kiekvienas nagrinėjamas skaičius tikrai išreiškiamas dviejų pirminių skaičių suma.

Nepilnąja indukcija vadinamas įrodymo metodas, kai teiginys patikrinamas, išnagrinėjus baigtinį skaičių atvejų, kuriais neišsemiamos visos galimybės. Vadinasi, remiantis nepilnąja indukcija, galima padaryti ir klaidingų išvadų.

1 pavyzdys.

Skaičius 60 dalijasi iš 1, 2, 3, 4, 5, 6, bet tai nereiškia, kad jis dalijasi iš visų natūraliųjų skaičių, mažesnių už 60.

Sprendimas. Šis teiginys nėra teisingas, nes 60 nesidalija iš daugelio natūrinių skaičių, mažesnių už 60.

Kelių atskirų narių nagrinėjimas yra svarbus matematikai. Nors tuo neįrodoma, kad teiginys yra teisingas, bet galima atspėti teiginio formuluotę, jeigu ši dar nežinoma.

2 pavyzdys.

Tarkime, $S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$, raskite formulę, pagal kurią galima apskaičiuoti šią sumą, nesudedant n dėmenų.

Sprendimas. Išnagrinėsime S_1, S_2, S_3 reikšmes:

$$S_1 = 1 = \frac{1 \cdot 2}{2},\ S_2 = 1 + 2 = \frac{2 \cdot 3}{2},\ S_3 = 1 + 2 + 3 = \frac{3 \cdot 4}{2}.$$

Iš šių pavyzdžių galima daryti išvadą, kad $S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, kai n – bet kuris natūrinis skaičius. Iš šių pavyzdžių negalima spręsti, kad lygybė yra teisinga, todėl keltina hipotezė, kurią reikia įrodyti.

Matematinės indukcijos metodas

Žinoma, kad predikatas, apibrėžtas natūraliųjų skaičių aibės, yra teisingas, kai $n = 1$ ($n = k$, $k \in N$). Tarkime, kad jis yra teisingas laisvai pasirinktam skaičiui n, išeina, kad jis yra teisingas su $n + 1$, taigi šis predikatas yra teisingas su visais natūraliaisiais skaičiais n.

Įrodymą matematinės indukcijos principu sudaro dvi dalys: indukcinė bazė ir indukcijos žingsnis. Indukcijos bazėje nustatoma, kad predikatas A (n) teisingas, kai $n = 1$($n = k$, $k \in N$). Remiantis indukcijos principu, daroma prielaida, kad predikatas A (n) yra teisingas su laisvai pasirinktu skaičiumi n ir įrodoma, kad predikatas A (n + 1) teisingas.

I. Matematinės indukcijos metodo taikymas, sprendžiant sumavimo uždavinius

1 pavyzdys.

Įrodykite, kad lygybė $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$ teisinga su visais natūraliaisiais skaičiais n.

Sprendimas. Sumą $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1)$ pažymėję S(n), turime įrodyti teiginį $S(n) = n^2$, kai $n \in N$.

Indukcinė bazė: $n = 1$. $S(1) = 1 = 1^2$. Vadinasi, teiginys teisingas, kai $n = 1$.

Indukcijos žingsnis. Tarkime, kad teiginys $S(k) = k^2$ yra teisingas, kai $k \in N$. Įrodysime, kad šiuo atveju teiginys $S(k + 1) = (k + 1)^2$ yra teisingas ir su kitu natūriniu skaičiumi $n = k + 1$.

$S(k + 1) = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + (2k + 1) = S(k) + 2k + 1 = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$. Vadinasi, teiginys yra teisingas, kai $n \in N$.

Atsakymas – lygybė $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$ yra teisinga, kai $n \in N$.

2 pavyzdys.

Įrodykite, kad lygybė $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ teisinga su visais natūraliaisiais skaičiais n.

Sprendimas. Sumą $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$ pažymėję S(n), turime įrodyti teiginį $S(n) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$, kai $n \in N$.

Indukcinė bazė: $n = 1$. $S(1) = 1^3 = \frac{1^2(1+1)^2}{4}$. Vadinasi, teiginys teisingas, kai $n = 1$.

Indukcijos žingsnis. Tarkime, kad teiginys $S(k) = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$ yra teisingas, kai $k \in N$. Įrodysime, kad šiuo atveju teiginys $S(k + 1) = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$ yra teisingas ir su kitu natūriniu skaičiumi $n = k + 1$.

$S(k + 1) = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 + (k + 1)^3 = S(k) + (k + 1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k + 1)^3 = (k + 1)^2\left(\frac{k^2}{4} + k + 1\right) = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$. Vadinasi, teiginys yra teisingas, kai $n \in N$.

Atsakymas – lygybė $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ yra teisinga, kai $n \in N$.

3 pavyzdys.

Įrodykite, kad aritmetinės $\{a_n\}$ progresijos pirmųjų n narių suma apskaičiuojama pagal formulę $S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$.

Sprendimas. Sumą $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ pažymėję A(n), o $\frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$ – B(n), kai $n \in N$.

Reikia įrodyti, kad $A(n) = B(n)$ yra teisinga su visomis natūrinėmis n reikšmėmis.

Indukcinė bazė: $n = 1$. $S(1) = a_1$, $B(1) = \frac{(a_1 + a_n) \cdot 1}{2} = a_1$. Vadinasi, teiginys teisingas, kai $n = 1$.

Indukcijos žingsnis. $A(k + 1) - A(k) = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k + a_{k+1} - (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k) = a_{k+1}$,

$B(k + 1) - B(k) = \frac{(a_1 + a_{k+1})(k + 1)}{2} - \frac{(a_1 + a_k)k}{2} = \frac{(a_1 + a_k + d)(k + 1) - (a_1 k + a_k k)}{2} = \frac{(a_1 + a_k + d)(k + 1)}{2} - \frac{(a_1 + a_k)k}{2} = \frac{(a_1 k + a_k k + kd + a_1 + a_k + d - a_1 k - a_k k)}{2} = \frac{(a_1 + kd + a_k + d)}{2} = \frac{(a_{k+1} + a_{k+1})}{2} = a_{k+1}$.

Kadangi $A(1) = B(1)$ ir $A(k + 1) - A(k) = B(k + 1) - B(k)$, tai $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$ yra teisinga su visomis natūrinėmis n reikšmėmis.

Atsakymas – lygybė $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$ yra teisinga, kai $n \in N$.

4 pavyzdys.

Įrodykite, kad lygybė $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + n \cdot n! = (n + 1)! - 1$ teisinga su visais natūraliaisiais skaičiais n, kai sandauga $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n - 1) \cdot n$ žymima ženklu n!.

Sprendimas. Sumą $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + n \cdot n!$ pažymėję S (n), turime įrodyti teiginį $S(n) = (n + 1)! - 1$, kai $n \in N$.

Indukcinė bazė: $n = 1$. $S(1) = 1 \cdot 1! = (1 + 1)! - 1$. Vadinasi, teiginys teisingas, kai $n = 1$.

Indukcijos žingsnis. Tarkime, kad teiginys $S(k)) = (k + 1)! - 1$ yra teisingas, kai $k \in N$. Įrodysime, kad šiuo atveju teiginys $S(k + 1) = (k + 2)! - 1$ yra teisingas ir su kitu natūriniu skaičiumi $n = k + 1$.

$S(k + 1) = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + k \cdot (k + 1)! + (k + 1)(k + 1)! = S(k) + (k + 1)(k + 1)! = (k + 1)! - 1 + (k + 1)(k + 1)! = (k + 1)!(k + 2) - 1 = (k + 2)! - 1$. Vadinasi, teiginys yra teisingas, kai $n = k + 1$, $k \in N$.

Atsakymas – lygybė $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + n \cdot n! = (n + 1)! - 1$ yra teisinga, kai $n \in N$.

5 pavyzdys.

Įrodykite, kad iškiliojo n – kampio kampų suma lygi $180°(n - 2)$.

Sprendimas. Iškiliojo n – kampio kampų sumą pažymėję S (n), turime įrodyti teiginį $S(n) = 180°(n - 2)$, kai $n \in N$.

Indukcinė bazė: $n = 3$. $S(3) = 180°(3 - 2) = 180°$. Vadinasi, teiginys teisingas, kai $n = 3$.

Indukcijos žingsnis. Tarkime, kad bet kurio iškiliojo k – kampio kampų suma lygi $180°(k - 2)$. Įrodysime, kad šiuo atveju šis teiginys teisingas ir tada, kai $n = k + 1$, t. y. kad iškiliojo (k + 1) – kampio kampų suma lygi $180°(k - 1)$. Tarkime, kad $A_1 A_2 \ldots A_k A_{k+1}$ – iškilusis (k+1) – kampis. Nubrėžkime jo įstrižainę $A_1 A_k$. Norint rasti (k + 1) – kampio kampų sumą, reikia apskaičiuoti k – kampio $A_1 A_2 \ldots A_k$ kampų sumą ir prie jos pridėti trikampio $A_1 A_k A_{k+1}$ kampų sumą. S(k+1) = S(k) + 180° = 180°(k – 2) + 180° = 180° (k – 1). Vadinasi, teiginys yra teisingas su bet kuriuo n – kampiu.

6 pavyzdys.

Įrodykite, kad lygybė $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n \cdot (n+1) = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{3}$ teisinga su visais natūraliaisiais skaičiais n.

Sumą $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n \cdot (n+1)$ pažymėję S (n), turime įrodyti teiginį $S(n) = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{3}$, kai $n \in N$.

Indukcinė bazė: n = 1. $S(1) = 1 \cdot 2 = 2 = \frac{1 \cdot (1+1) \cdot (1+2)}{3}$. Vadinasi, teiginys teisingas, kai n = 1.

Indukcijos žingsnis. Tarkime, kad teiginys $S(k) = \frac{k \cdot (k+1) \cdot (k+2)}{3}$ yra teisingas, kai $k \in N$. Įrodysime, kad šiuo atveju teiginys $S(k+1) = \frac{(k+1) \cdot (k+2) \cdot (k+3)}{3}$ yra teisingas ir su kitu natūriniu skaičiumi n = k + 1.

$S(k+1) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + k \cdot (k+1) + (k+1)(k+2) = S(k) + (k+1) \cdot (k+2) = \frac{k \cdot (k+1) \cdot (k+2)}{3} + (k+1) \cdot (k+2) = \frac{(k+1) \cdot (k+2) \cdot (k+3)}{3}$. Vadinasi, teiginys yra teisingas, kai $n \in N$.

Atsakymas – lygybė $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n \cdot (n+1) = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{3}$ yra teisinga, kai $n \in N$.

Uždaviniai

1. Įrodykite, kad lygybė $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} \ldots + \frac{n}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}$ teisinga su visais natūraliaisiais skaičiais n.

P. Sumą $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} \ldots + \frac{n}{n \cdot (n+1)}$ pažymėję S(n), turime įrodyti teiginį $S(n) = \frac{n}{n+1}$, kai $n \in N$.

Indukcinė bazė: n = 1. $S(1) = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$. Vadinasi, teiginys teisingas, kai n = 1.

Indukcijos žingsnis. Tarkime, kad teiginys $S(k) = k/(k+1)$ yra teisingas, kai $k \in N$. Įrodysime, kad šiuo atveju teiginys $S(k+1) = \frac{k+1}{k+2}$ yra teisingas ir su kitu natūriniu skaičiumi n = k + 1.

$S(k+1) = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} \ldots + \frac{1}{k \cdot (k+1)} + \frac{1}{(k+1) \cdot (k+2)} = S(k) + \frac{1}{(k+1) \cdot (k+2)} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1) \cdot (k+2)} = \frac{k^2 + 2k + 1}{(k+1) \cdot (k+2)} = \frac{(k+1)^2}{(k+1) \cdot (k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$. Vadinasi, teiginys yra teisingas, kai $n \in N$.

Atsakymas – lygybė $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} \ldots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}$ yra teisinga, kai $n \in N$.

---

2. Įrodykite, kad lygybė $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ teisinga su visais natūraliaisiais skaičiais n.

P. Sumą $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$ pažymėję S(n), turime įrodyti teiginį $S(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, kai $n \in N$.

Indukcinė bazė: n = 1. $S(1) = 1^2 = \frac{1 \cdot (1+1)(2+1)}{6} = 1$. Vadinasi, teiginys teisingas, kai n = 1.

Indukcijos žingsnis. Tarkime, kad teiginys $S(k)) = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ yra teisingas, kai $k \in N$. Įrodysime, kad šiuo atveju teiginys $S(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$ yra teisingas ir su kitu natūriniu skaičiumi n = k + 1.

$S(k+1) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 = S(k) + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = (k+1)\,\frac{k(2k+1) + 6(k+1)}{6} = (k+1)\,\frac{2k^2 + 7k + 6}{6} = \frac{(k+1)2(k+2)(k+1{,}5)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$. Vadinasi, teiginys yra teisingas, kai $n \in N$.

Atsakymas – lygybė yra teisinga $S(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, kai $n \in N$.

3. Įrodykite, kad geometrinės progresijos $\{a_n\}$ pirmųjų n narių suma apskaičiuojama pagal formulę $S_n = \frac{b_1(q^n-1)}{q-1}$, kai $q \neq 1$.

P. Sumą $b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n$ pažymėję S(n), turime įrodyti teiginį $S(n) = \frac{b_1(q^n-1)}{q-1}$, kai $n \in N$.

Indukcinė bazė: n = 1. $S(1) = b_1 = \frac{b_1(q^1-1)}{q-1} = b_1$, $q \neq 1$. Vadinasi, teiginys teisingas, kai n = 1.

Indukcijos žingsnis. Tarkime, kad teiginys $S(k) = \frac{b_1(q^k-1)}{q-1}$ yra teisingas, kai $q \neq 1$, $k \in N$. Įrodysime, kad šiuo atveju teiginys $S(k+1) = \frac{b_1(q^{k+1}-1)}{q-1}$ yra teisingas ir su kitu natūriniu skaičiumi $n = k + 1$, $q \neq 1$.

$S(k+1) = S(k) + b_{k+1} = \frac{b_1(q^k-1)}{q-1} + b_1 q^k = \frac{b_1(q^k-1) + b_1q^k(q-1)}{q-1} = \frac{b_1q^k - b_1 + b_1q^{k+1} - b_1q^k}{q-1} = \frac{b_1(q^{k+1}-1)}{q-1}$.

Vadinasi, teiginys yra teisingas, kai n = k + 1, $k \in N$, $q \neq 1$.

Atsakymas – lygybė $S_n = \frac{b_1(q^n-1)}{q-1}$ yra teisinga, kai $q \neq 1$, $n \in N$.

---

4. Įrodykite, kad lygybė $\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 10} + \cdots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1}$ teisinga su visais natūraliaisiais skaičiais n.

P. Sumą $\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 10} + \cdots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$ pažymėję S (n), turime įrodyti teiginį $S(n) = \frac{n}{3n+1}$, kai $n \in N$.

Indukcinė bazė: n = 1. $S(1) = \frac{1}{1\cdot 4} = \frac{1}{4} = \frac{1}{3\cdot 1+1}$.

Indukcijos žingsnis. Tarkime, kad teiginys $S(k) = \frac{k}{3k+1}$ yra teisingas, kai $k \in N$. Įrodysime, kad šiuo atveju teiginys $S(k+1) = \frac{k+1}{3k+4}$ yra teisingas ir su kitu natūriniu skaičiumi n = k + 1.

$S(k+1) = \frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 10} + \cdots + \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} + \frac{1}{(3k+4)(3k+1)} = \frac{k}{3k+1} + \frac{1}{(3k+4)(3k+1)} = \frac{k(3k+4)+1}{(3k+1)(3k+4)} = \frac{3k^2+4k+1}{(3k+1)(3k+4)} = \frac{3(k+\frac{1}{3})(k+1)}{(3k+1)(3k+4)} = \frac{k+1}{3k+4}$. Vadinasi, teiginys yra teisingas, kai $n \in N$.

Atsakymas – lygybė $\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 10} + \cdots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1}$ yra teisinga, kai $n \in N$.

---

5. Tarkime, kad seka $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ apibrėžiama šitaip: $a_1 = 2$ ir $a_{n+1} = \frac{n+2}{n} a_n$. Įrodykite, kad $a_n = n(n+1)$.

P. Indukcinė bazė: n = 1. $a_1 = 2$, $a_1 = 1(1+1) = 2$. Vadinasi, teiginys teisingas, kai n = 1.

Indukcijos žingsnis. Tarkime, kad teiginys teisingas su visais natūriniais skaičiais n = k, $a_k = k(k+1)$, ir įrodykime, kad šiuo atveju jis teisingas ir tada, kai n = k + 1, t. y. kad $a_{k+1} = (k+1)(k+2)$. Iš sekos apibrėžimo darome išvadą, kad $a_{k+1} = \frac{k+2}{k} a_k = \frac{k+2}{k} \cdot k(k+1) = (k+1)(k+2)$. Vadinasi, teiginys yra teisingas, kai n = k + 1.

Atsakymas – teiginys įrodytas su visais skaičiais $n \in N$.