

Matematinė indukcija. A dalis

Užuominos

1. Sumą $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)}$ pažymėję $S(n)$, turime įrodyti teiginį $S(n) = \frac{n}{n+1}$, kai $n \in \mathbb{N}$.
Indukcinė bazė: $n = 1$. $S(1) = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$. Vadinasi, teiginys teisingas, kai $n = 1$.

Indukcijos žingsnis. Tarkime, kad teiginys $S(k) = k/(k+1)$ yra teisingas, kai $k \in \mathbb{N}$. Įrodysime, kad šiuo atveju teiginys $S(k+1) = \frac{k+1}{k+2}$ yra teisingas ir su kitu natūriniu skaičiumi $n = k+1$.

$$\begin{aligned} S(k+1) &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} \dots + \frac{1}{k \cdot (k+1)} + \frac{1}{(k+1) \cdot (k+2)} = S(k) + \frac{1}{(k+1) \cdot (k+2)} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1) \cdot (k+2)} = \frac{k^2 + 2k + 1}{(k+1) \cdot (k+2)} \\ &= \frac{(k+1)^2}{(k+1) \cdot (k+2)} = \frac{k+1}{k+2}. \end{aligned}$$

Vadinasi, teiginys yra teisingas, kai $n \in \mathbb{N}$.

2. Sumą $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$ pažymėję $S(n)$, turime įrodyti teiginį $S(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, kai $n \in \mathbb{N}$.

Indukcinė bazė: $n = 1$. $S(1) = 1^2 = \frac{1 \cdot (1+1)(2+1)}{6} = 1$. Vadinasi, teiginys teisingas, kai $n = 1$.

Indukcijos žingsnis. Tarkime, kad teiginys $S(k) = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ yra teisingas, kai $k \in \mathbb{N}$. Įrodysime, kad

šiuo atveju teiginys $S(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$ yra teisingas ir su kitu natūriniu skaičiumi $n = k+1$.

$$S(k+1) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = S(k) + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = (k+1) \frac{k(2k+1) + 6(k+1)}{6}$$
$$= (k+1) \frac{2k^2 + 7k + 6}{6} = \frac{(k+1)2(k+2)(k+1,5)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$
 Vadinasi, teiginys yra teisingas, kai $n \in \mathbb{N}$.

3. Sumą $b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n$ pažymėję $S(n)$, turime įrodyti teiginį $S(n) = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$, kai $n \in \mathbb{N}$.

Indukcinė bazė: $n = 1$. $S(1) = b_1 = \frac{b_1(q^1 - 1)}{q - 1} = b_1$, $q \neq 1$. Vadinasi, teiginys teisingas, kai $n = 1$.

Indukcijos žingsnis. Tarkime, kad teiginys $S(k) = \frac{b_1(q^k - 1)}{q - 1}$ yra teisingas, kai $q \neq 1$, $k \in \mathbb{N}$. Įrodysime, kad

šiuo atveju teiginys $S(k+1) = \frac{b_1(q^{k+1} - 1)}{q - 1}$ yra teisingas ir su kitu natūriniu skaičiumi $n = k+1$, $q \neq 1$.

$$S(k+1) = S(k) + b_{k+1} = \frac{b_1(q^k - 1)}{q - 1} + b_1 q^k = \frac{b_1(q^k - 1) + b_1 q^k(q - 1)}{q - 1} = \frac{b_1 q^k - b_1 + b_1 q^{k+1} - b_1 q^k}{q - 1} = \frac{b_1(q^{k+1} - 1)}{q - 1}.$$

Vadinasi, teiginys yra teisingas, kai $n = k+1$, $k \in \mathbb{N}$, $q \neq 1$.

4. Sumą $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$ pažymėję $S(n)$, turime įrodyti teiginį $S(n) = \frac{n}{3n+1}$, kai $n \in \mathbb{N}$.

Indukcinė bazė: $n = 1$. $S(1) = \frac{1}{1 \cdot 4} = \frac{1}{4} = \frac{1}{3 \cdot 1 + 1}$.

Indukcijos žingsnis. Tarkime, kad teiginys $S(k) = \frac{k}{3k+1}$ yra teisingas, kai $k \in \mathbb{N}$. Įrodysime, kad šiuo atveju teiginys $S(k+1) = \frac{k+1}{3k+4}$ yra teisingas ir su kitu natūriniu skaičiumi $n = k+1$.

$$\begin{aligned} S(k+1) &= \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} + \frac{1}{(3k+4)(3k+1)} = \frac{k}{3k+1} + \frac{1}{(3k+4)(3k+1)} = \frac{k(3k+4) + 1}{(3k+1)(3k+4)} = \\ &= \frac{3k^2 + 4k + 1}{(3k+1)(3k+4)} = \frac{3(k + \frac{1}{3})(k+1)}{(3k+1)(3k+4)} = \frac{k+1}{3k+4}. \end{aligned}$$

Vadinasi, teiginys yra teisingas, kai $n \in \mathbb{N}$.

5. Indukcinė bazė: $n = 1$. $a_1 = 2$, $a_1 = 1(1+1) = 2$. Vadinasi, teiginys teisingas, kai $n = 1$.

Indukcijos žingsnis. Tarkime, kad teiginys teisingas su visais natūriniais skaičiais $n = k$, $a_k = k(k+1)$, ir įrodykime, kad šiuo atveju jis teisingas ir tada, kai $n = k+1$, t. y. kad $a_{k+1} = (k+1)(k+2)$. Iš sekos apibrėžimo darome išvadą, kad $a_{k+1} = \frac{k+2}{k} a_k = \frac{k+2}{k} \cdot k(k+1) = (k+1)(k+2)$. Vadinasi, teiginys yra teisingas, kai $n = k+1$.