

Matematinė indukcija. B dalis

Ivadas

Pilnoji ir nepilnoji indukcija

Žodis *indukcija* reiškia samprotavimus, kai, remiantis atskirais teiginiais, daromos bendros išvados. Pilnąja indukcija vadinamas įrodymo metodas, kai teiginys patikrinamas, išnagrinėjus baigtinį skaičių atvejų, kuriais išsemiamos visos galimybės.

Pavyzdys.

Reikia įrodyti, kad kiekvieną natūralųjį lyginį skaičių n ($3 < n < 101$) galima išreikšti dviejų pirmųjų skaičių suma. Visi nagrinėjami skaičiai išdėstomi atitinkamai:

$$\begin{aligned} 4 &= 2 + 2, \\ 6 &= 3 + 3, \\ 8 &= 5 + 3, \\ 10 &= 7 + 3, \\ &\dots\dots\dots \\ 98 &= 93 + 5, \\ 100 &= 97 + 3. \end{aligned}$$

Šios 49 lygybės rodo, kad kiekvienas nagrinėjamas skaičius tikrai išreiškiamas dviejų pirminių skaičių suma.

Nepilnaja indukcija vadinamas įrodymo meto-
das, kai teiginys patikrinamas, išnagrinėjus baigtinį
skaičių atvejų, kuriais neišsemiamos visos galimybės.
Vadinasi, remiantis nepilnaja indukcija, galima
padaryti ir klaidingų išvadų.

1 pavyzdys.

Skaičius 60 dalijasi iš 1, 2, 3, 4, 5, 6, bet tai nereiškia, kad jis dalijasi iš visų natūraliųjų skaičių, mažesnių už 60.

Sprendimas. Šis teiginys nėra teisingas, nes 60 nėsidalija iš daugelio natūrinių skaičių, mažesnių už 60.

Kelių atskirų narių nagrinėjimas yra svarbus matematikai. Nors tuo neįrodoma, kad teiginys yra teisingas, bet galima atspėti teiginio formuluotę, jeigu ši dar nežinoma.

2 pavyzdys.

Tarkime, $S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$, raskite formulę, pagal kurią galima apskaičiuoti šią sumą, nesude-
dant n dėmenų.

Sprendimas. Išnagrinėsime S_1, S_2, S_3 reikšmes:

$$S_1 = 1 = \frac{1 \cdot 2}{2}, S_2 = 1 + 2 = \frac{2 \cdot 3}{2}, S_3 = 1 + 2 + 3 = \frac{3 \cdot 4}{2}.$$

Iš šių pavyzdžių galima daryti išvadą, kad $S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, kai n – bet kuris natūrinis skaičius. Iš šių pavyzdžių negalima spręsti, kad lygibė yra teisinga, todėl keltina hipotezę, kurią reikia įrodyti.

Matematinės indukcijos metodas

Žinoma, kad predikatas, apibrėžtas natūraliųjų skaičių aibės, yra teisingas, kai $n = 1$ ($n = k$, $k \in \mathbb{N}$). Tarkime, kad jis yra teisingas laisvai pasirinktam skaičiui n , išeina, kad jis yra teisingas su $n + 1$, taigi šis predikatas yra teisingas su visais natūraliaisiais skaičiais n .

Įrodymą matematinės indukcijos principu sudaro dvi dalys: indukcinė bazė ir indukcijos žingsnis. Indukcijos bazėje nustatoma, kad predikatas $A(n)$ teisingas, kai $n = 1$ ($n = k, k \in \mathbb{N}$). Remiantis indukcijos principu, daroma prielaida, kad predikatas $A(n)$ yra teisingas su laisvai pasirinktu skaičiumi n ir įrodoma, kad predikatas $A(n + 1)$ teisingas.

I. Matematinės indukcijos metodo taikymas, įrodant nelygybes bei sprendžiant dalumo uždavinius

(Susitarkime vietoj frazės „dalijasi be liekanos“ naudoti ženklą $\vdots$.)

1 pavyzdys.

Įrodykite, kad $(11^{n+2} + 12^{2n+1}) \vdots 133$.

Sprendimas. Indukcinė bazė: kai $n = 1$, tai $(11^{1+2} + 12^{2 \cdot 1 + 1}) = (11^3 + 12^3) = (11 + 12) \cdot (11^2 - 11 \cdot 12 + 12^2) = 23 \cdot 133 \vdots 133$, vadinasi, kai $n = 1$, teiginys teisingas.

Indukcijos žingsnis. Tarkime, kad $(11^{k+2} + 12^{2k+1}) \vdots 133$ teiginys yra teisingas, kai $n = k$. Įrodysime, kad šiuo atveju teiginys $(11^{k+3} + 12^{2k+3}) \vdots 133$ yra teisingas ir su kitu natūriniu skaičiumi $n = k + 1$. Iš tikrųjų $(11^{k+3} + 12^{2k+3}) = 11(11^{k+2} + 12^{2k+1}) - 11 \cdot 12^{2k+1} + 12^{2k+3} = 11(11^{k+2} + 12^{2k+1}) + 133 \cdot 12^{2k+1} \vdots 133$.

Atsakymas – teiginys įrodytas.

2 pavyzdys.

Įrodykite, kad $(3^{2n+2} - 8n - 9) \vdots 64$.

Sprendimas. Indukcinė bazė: kai $n = 1$, tai $(3^{2 \cdot 1 + 2} - 8 \cdot 1 - 9) = 64 \vdots 64$, vadinasi, kai $n = 1$, teiginys teisingas.

Indukcijos žingsnis. Tarkime, kad $(3^{2k+2} - 8k - 9) \vdots 64$ teiginys yra teisingas, kai $n = k$. Įrodysime, kad šiuo atveju teiginys $(3^{2k+4} - 8k - 17) \vdots 64$ yra teisingas ir su kitu natūriniu skaičiumi $n = k + 1$. Iš tikrųjų $(3^{2k+4} - 8k - 17) = 9(3^{2k+2} - 8k - 9) + 9 \cdot (8k + 9) - 8k - 17 = 9(3^{2k+2} - 8k - 9) + 64k + 64 \vdots 64$.

Atsakymas – teiginys įrodytas.

3 pavyzdys.

Įrodykite, kad su bet kuriuo natūraliuoju skaičiumi n , didesniu už vienetą, nelygybė $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$ teisinga.

Sprendimas. Sumą $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$ pažymėję $S(n)$, turime įrodyti teiginį $S(n) > \frac{13}{24}$, kai $n \in \mathbb{N}$.

Indukcinė bazė: $n = 2$. $S(2) = \frac{1}{2+1} + \frac{1}{2+1} = \frac{2}{3} > \frac{13}{24}$. Vadinasi, teiginys teisingas, kai $n = 2$.

Indukcijos žingsnis. Tarkime, kad teiginys $S(k) = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+1} + \dots + \frac{1}{2k} > \frac{13}{24}$ yra teisingas, kai $n = k$.

Įrodysime, kad šiuo atveju teiginys $S(k+1) = \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \dots + \frac{1}{2k+2} > \frac{13}{24}$ yra teisingas ir su kitu natūriniu skaičiumi $n = k + 1$.

$S(k+1) = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \dots + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+2} = S(k) + \frac{1}{2k+2} > \frac{13}{24} + \frac{1}{2k+2} > \frac{13}{24}$ kadangi $\frac{1}{2k+2} > 0$, kai $k \in \mathbb{N}$. Vadinasi, teiginys yra teisingas, kai $n \in \mathbb{N}$.

Atsakymas – teiginys įrodytas.

4 pavyzdys.

Įrodykite, kad su bet kuriuo natūraliuoju skaičiumi n , didesniu už keturis, nelygybė $2^n > n^2$ teisinga.

Sprendimas. Indukcinė bazė: kai $n = 5$, tai $2^5 > 5^2$, vadinasi, kai $n = 5$, teiginys teisingas.

Indukcijos žingsnis. Tarkime, kad $2^k > k^2$ teiginys yra teisingas, kai $n = k$. Įrodysime, kad šiuo atveju teiginys $2^{k+1} > (k+1)^2$ yra teisingas ir su kitu natūriniu skaičiumi $n = k + 1$. Iš tikrųjų $2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2 \cdot k^2 > (k+1)^2$, kai $k \geq 5$.

Atsakymas – teiginys įrodytas.

5 pavyzdys.

Įrodykite, kad iškiliojo n – kampio kampų suma lygi $180^\circ (n - 2)$.

Sprendimas. Iškiliojo n – kampio kampų sumą pažymėję $S(n)$, turime įrodyti teiginį $S(n) = 180^\circ (n - 2)$, kai $n \in \mathbb{N}$.

Indukcinė bazė: $n = 3$. $S(3) = 180^\circ (3 - 2) = 180^\circ$. Vadinasi, teiginys teisingas, kai $n = 3$.

Indukcijos žingsnis. Tarkime, kad bet kurio iškiliojo k – kampio kampų suma lygi $180^\circ (k - 2)$. Įrodysime, kad šiuo atveju šis teiginys teisingas ir tada, kai $n = k + 1$, t. y. kad iškiliojo $(k + 1)$ – kampio kampų suma lygi $180^\circ (k - 1)$. Tarkime, kad $A_1 A_2 \dots A_k A_{k+1}$ – iškiliusis $(k + 1)$ – kampis. Nubrėžkime jo įstrižainę $A_1 A_k$. Norint rasti $(k + 1)$ – kampio kampų sumą, reikia apskaičiuoti k – kampio $A_1 A_2 \dots A_k$ kampų sumą ir prie jos pridėti trikampio $A_1 A_k A_{k+1}$ kampų sumą $S(k + 1) = S(k) + 180^\circ = 180^\circ (k - 2) + 180^\circ = 180^\circ (k - 1)$. Vadinasi, teiginys yra teisingas su bet kuriuo n – kampiu.

Atsakymas – teiginys įrodytas.

Uždaviniai

1. Įrodykite, kad $(2^{n+2} \cdot 3^n + 5n - 4) : 25$.

2. Įrodykite, kad $1 + 2^n + 2^{2n}$ dalijasi iš 7, kai n nėra skaičiaus 3 kartotinis.

3. Įrodykite nelygybę $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n}$, kai $n \geq 2$ ir $n \in \mathbb{N}$.

4. Įrodykite nelygybę $2^{\frac{n(n-1)}{2}} > n!$ su visais natūraliaisiais skaičiais $n \geq 3$.

5. Įrodykite, kad iškiliojo n – kampio įstrižainių skaičius lygus $\frac{n(n-3)}{2}$.