Matematinė indukcija. B dalis

Įvadas

Pilnoji ir nepilnoji indukcija

Žodis *indukcija* reiškia samprotavimus, kai, remiantis atskirais teiginiais, daromos bendros išvados. Pilnąja indukcija vadinamas įrodymo metodas, kai teiginys patikrinamas, išnagrinėjus baigtinį skaičių atvejų, kuriais išsemiamos visos galimybės.

Pavyzdys.

Reikia įrodyti, kad kiekvieną natūralųjį lyginį skaičių n ($3 < n < 101$) galima išreikšti dviejų pirminių skaičių suma. Visi nagrinėjami skaičiai išdėstomi atitinkamai:

$$
\begin{aligned}
4 &= 2 + 2,\\
6 &= 3 + 3,\\
8 &= 5 + 3,\\
10 &= 7 + 3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
98 &= 93 + 5,\\
100 &= 97 + 3.
\end{aligned}
$$

Šios 49 lygybės rodo, kad kiekvienas nagrinėjamas skaičius tikrai išreiškiamas dviejų pirminių skaičių suma.

Nepilnąja indukcija vadinamas įrodymo metodas, kai teiginys patikrinamas, išnagrinėjus baigtinį skaičių atvejų, kuriais neišsemiamos visos galimybės. Vadinasi, remiantis nepilnąja indukcija, galima padaryti ir klaidingų išvadų.

1 pavyzdys.

Skaičius 60 dalijasi iš 1, 2, 3, 4, 5, 6, bet tai nereiškia, kad jis dalijasi iš visų natūraliųjų skaičių, mažesnių už 60.

Sprendimas. Šis teiginys nėra teisingas, nes 60 nesidalija iš daugelio natūrinių skaičių, mažesnių už 60.

Kelių atskirų narių nagrinėjimas yra svarbus matematikai. Nors tuo neįrodoma, kad teiginys yra teisingas, bet galima atspėti teiginio formuluotę, jeigu ši dar nežinoma.

2 pavyzdys.

Tarkime, $S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$, raskite formulę, pagal kurią galima apskaičiuoti šią sumą, nesudedant n dėmenų.

Sprendimas. Išnagrinėsime S_1, S_2, S_3 reikšmes:

$$S_1 = 1 = \frac{1 \cdot 2}{2},\ S_2 = 1 + 2 = \frac{2 \cdot 3}{2},\ S_3 = 1 + 2 + 3 = \frac{3 \cdot 4}{2}.$$

Iš šių pavyzdžių galima daryti išvadą, kad $S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, kai n – bet kuris natūrinis skaičius. Pagal šiuos pavyzdžius negalima spręsti, kad lygybė yra teisinga, todėl keltina hipotezė, kurią reikia įrodyti.

Matematinės indukcijos metodas

Žinoma, kad predikatas, apibrėžtas natūraliųjų skaičių aibės, yra teisingas, kai $n = 1$ ($n = k$, $k \in N$). Tarkime, kad jis yra teisingas laisvai pasirinktam skaičiui n, išeina, kad jis yra teisingas su $n + 1$, taigi šis predikatas yra teisingas su visais natūraliaisiais skaičiais n.

Įrodymą matematinės indukcijos principu sudaro dvi dalys: indukcinė bazė ir indukcijos žingsnis. Indukcijos bazėje nustatoma, kad predikatas A (n) teisingas, kai $n = 1$($n = k$, $k \in N$). Remiantis indukcijos principu daroma prielaida, kad predikatas A (n) yra teisingas su laisvai pasirinktu skaičiumi n ir įrodoma, kad predikatas A (n + 1) teisingas.

I. Matematinės indukcijos metodo taikymas, įrodant nelygybes bei sprendžiant dalumo uždavinius

(Susitarkime vietoj frazės „dalijasi be liekanos" naudoti ženklą ⋮.)

1 pavyzdys.

Įrodykite, kad $(11^{n+2} + 12^{2n+1}) \vdots 133$.

Sprendimas. Indukcinė bazė: kai n = 1, tai $(11^{1+2} + 12^{2\cdot 1+1}) = (11^3 + 12^3) = (11 + 12)\cdot(11^2 - 11\cdot 12 + 12^2) = 23\cdot 133 \vdots 133$, vadinasi, kai n = 1, teiginys teisingas.

Indukcijos žingsnis. Tarkime, kad $(11^{k+2} + 12^{2k+1}) \vdots 133$ teiginys yra teisingas, kai n = k. Įrodysime, kad šiuo atveju teiginys $(11^{k+3} + 12^{2k+3}) \vdots 133$ yra teisingas ir su kitu natūriniu skaičiumi n = k + 1. Iš tikrųjų $(11^{k+3} + 12^{2k+3}) = 11(11^{k+2} + 12^{2k+1}) - 11\cdot 12^{2k+1} + 12^{2k+3} = 11(11^{k+2} + 12^{2k+1}) + 133\cdot 12^{2k+1} \vdots 133$.

Atsakymas – teiginys įrodytas.

2 pavyzdys.

Įrodykite, kad $(3^{2n+2} - 8n - 9) \vdots 64$.

Sprendimas. Indukcinė bazė: kai n = 1, tai $(3^{2\cdot 1+2} - 8\cdot 1 - 9) = 64 \vdots 64$, vadinasi, kai n = 1, teiginys teisingas.

Indukcijos žingsnis. Tarkime, kad $(3^{2k+2} - 8k - 9) \vdots 64$ teiginys yra teisingas, kai n = k. Įrodysime, kad šiuo atveju teiginys $(3^{2k+4} - 8k - 17) \vdots 64$ yra teisingas ir su kitu natūriniu skaičiumi n = k + 1. Iš tikrųjų $(3^{2k+4} - 8k - 17) = 9(3^{2k+2} - 8k - 9) + 9\cdot(8k + 9) - 8k - 17 = 9(32^{k+2} - 8k - 9) + 64k + 64 \vdots 64$.

Atsakymas – teiginys įrodytas.

3 pavyzdys.

Įrodykite, kad su bet kuriuo natūraliuoju skaičiumi n, didesniu už vienetą, nelygybė $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$ teisinga.

Sprendimas. Sumą $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$ pažymėję S (n), turime įrodyti teiginį $S(n) > \frac{13}{24}$, kai $n \in N$

Indukcinė bazė: n = 2. $S(2) = \frac{1}{2+1} + \frac{1}{2+1} = \frac{7}{12} > \frac{13}{24}$. Vadinasi, teiginys teisingas, kai n = 2.

Indukcijos žingsnis. Tarkime, kad teiginys $S(k) = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+1} + \dots + \frac{1}{2k} > \frac{13}{24}$ yra teisingas, kai n = k. Įrodysime, kad šiuo atveju teiginys $S(k+1) = \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \dots + \frac{1}{2k+2} > \frac{13}{24}$ yra teisingas ir su kitu natūriniu skaičiumi n = k + 1.

$S(k+1) = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \dots \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+2} = S(k) + \frac{1}{2k+2} > \frac{13}{24} + \frac{1}{2k+2} > \frac{13}{24}$ kadangi $\frac{1}{2k+2} > 0$, kai $k \in N$. Vadinasi, teiginys yra teisingas, kai $n \in N$.

Atsakymas – teiginys įrodytas.

4 pavyzdys.

Įrodykite, kad su bet kuriuo natūraliuoju skaičiumi n, didesniu už keturis, nelygybė $2^n > n^2$ teisinga.

Sprendimas. Indukcinė bazė: kai n = 5, tai $2^5 > 5^2$, vadinasi, kai n = 5, tai teiginys teisingas.

Indukcijos žingsnis. Tarkime, kad $2^k > k^2$ teiginys yra teisingas, kai n = k. Įrodysime, kad šiuo atveju teiginys $2^{k+1} > (k + 1)^2$ yra teisingas ir su kitu natūriniu skaičiumi n = k + 1. Iš tikrųjų $2^{k+1} = 2\cdot 2^k > 2\cdot k^2 > (k + 1)^2$, kai $k \geq 5$.

Atsakymas – teiginys įrodytas.

5 pavyzdys.

Įrodykite, kad iškiliojo n – kampio kampų suma lygi 180^0 (n – 2).

Sprendimas. Iškiliojo n – kampio kampų sumą pažymėję S (n), turime įrodyti teiginį S (n) = 180^0 (n – 2), kai $n \in N$.

Indukcinė bazė: n = 3. S(3) = 180^0 (3 – 2) = 180^0. Vadinasi, teiginys teisingas, kai n = 3.

Indukcijos žingsnis. Tarkime, kad bet kurio iškiliojo k – kampio kampų suma lygi 180^0 (k – 2). Įrodysime, kad šiuo atveju šis teiginys teisingas ir tada, kai n = k + 1, t. y. kad iškiliojo (k + 1) – kampio kampų suma lygi180^0 (k – 1). Tarkime, kad $A_1\ A_2 \dots A_k\ \ A_{k+1}$ – iškilusis (k + 1) – kampis. Nubrėžkime jo įstrižainę $A_1\ A_k$. Norint rasti (k + 1) – kampio kampų sumą , reikia apskaičiuoti k – kampio $A_1\ \ A_2 \dots A_k$ kampų sumą ir prie jos pridėti trikampio $A_1\ A_k\ \ A_{k+1}$ kampų sumą S(k + 1) = S(k) + 180^0 = 180^0 (k – 2) + 180^0 = 180^0 (k – 1). Vadinasi, teiginys yra teisingas su bet kuriuo n – kampiu.

Atsakymas – teiginys įrodytas.

Uždaviniai

1. Įrodykite, kad $(2^{n+2} \cdot 3^n + 5n - 4) \vdots 25$.

P. Indukcinė bazė: kai $n = 1$, tai $(2^{1+2} \cdot 3^1 + 5 \cdot 1 - 4) = 25 \vdots 25$, vadinasi, kai $n = 1$, teiginys teisingas. Indukcijos žingsnis. Tarkime, kad $(2^{k+2} \cdot 3^k + 5k - 4) \vdots 25$ teiginys yra teisingas, kai $n = k$. Įrodysime, kad šiuo atveju teiginys $(2^{k+3} \cdot 3^{k+1} + 5(k+1) - 4) \vdots 25 = (2^{k+3} \cdot 3^{k+1} + 5k + 1) \vdots 25$ yra teisingas ir su kitu natūriniu skaičiumi $n = k + 1$. Iš tikrųjų $(2^{k+3} \cdot 3^{k+1} + 5k + 1) \vdots 25 = (2 \cdot 3\,(2^{k+2}) \cdot 3^k + 5k - 4) - 25k + 25) = (6\,(2^{k+2} \cdot 3^k + 5k - 4) - 25\,(k - 1)) \vdots 25$. Kadangi sumos abu dėmenys dalijasi iš 25, todėl ir suma dalijasi iš 25.
Atsakymas – teiginys įrodytas.

---

2. Įrodykite, kad $1 + 2^n + 2^{2n}$ dalijasi iš 7, kai n nėra skaičiaus 3 kartotinis.

P. Indukcinė bazė: kai $n = 1$, tai $1 + 2^1 + 2^{2 \cdot 1}) = 7$, vadinasi, kai $n = 1$, teiginys teisingas.
Kai $n = 2$, tai $1 + 2^2 + 2^{2 \cdot 2}) = 21$, vadinasi, kai $n = 2$, teiginys teisingas.
Indukcijos žingsnis. Tarkime, kad $1 + 2^m + 2^{2m}$ dalijasi iš 7, kai $m = 3k \pm 1$. Tada $1 + 2^{m+3} + 2^{2(m+3)} = (1 + 2^m + 2^{2m}) + (7 \cdot 2^m + 63 \cdot 2^{2m})$. Vadinasi, $2^{m+3} + 2^{2(m+3)})$ dalijasi iš 7, nes abu dėmenys dalijasi iš 7.
Atsakymas – teiginys įrodytas.

---

3. Įrodykite nelygybę $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n}$, kai $n \geq 2$ ir $n \in N$.

P. Indukcinė bazė: kai $n = 2$, tai $1 + \frac{1}{2^2} < 2 - \frac{1}{2}$, vadinasi, kai $n = 2$, teiginys teisingas.
Indukcijos žingsnis. Tarkime, kad teiginys $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{k}$ yra teisingas, kai $n = k$. Įrodysime, kad šiuo atveju teiginys $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} < 2 - \frac{1}{k+1}$ yra teisingas ir su kitu natūriniu skaičiumi $n = k + 1$. Iš tikrųjų $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} < 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} < 2 - \frac{1}{(k+1)}$, kai $k \geq 2$.
Atsakymas – teiginys įrodytas.

---

4. Įrodykite nelygybę $2^{\frac{n(n-1)}{2}} > n!$ su visais natūraliaisiais skaičiais $n \geq 3$.

P. Indukcinė bazė: kai $n = 3$, tai $2^{\frac{3(3-1)}{2}} > 3!$, vadinasi, kai $n = 3$, teiginys teisingas.
Indukcijos žingsnis. Tarkime, kad teiginys $2^{\frac{k(k-1)}{2}} > k!$ yra teisingas, kai $n = k$. Įrodysime, kad šiuo atveju

teiginys $2^{\frac{k(k+1)}{2}} > (k+1)!$ yra teisingas ir su kitu natūriniu skaičiumi $n = k + 1$. Iš tikrųjų $2^{\frac{k(k+1)}{2}} = 2^{\frac{k(k-1)}{2}}$ $2^k > k! \cdot 2^k > k! \cdot (k+1)$, nes $2^k > k + 1$, kai $k \geq 2$. Vadinasi, teiginys yra teisingas su visais natūraliaisiais skaičiais $n \geq 3$.

Atsakymas – teiginys įrodytas.

---

5. Įrodykite, kad iškiliojo n – kampio įstrižainių skaičius lygus $\frac{n(n-3)}{2}$.

P. Iškiliojo n – kampio įstrižainių skaičių pažymėję $S(n)$, turime įrodyti teiginį $S(n) = \frac{n(n-3)}{2}$, kai $n \geq 3 \in N$.

Indukcinė bazė: $n = 3$. $S(3) = \frac{3(3-3)}{2} = 0$. Vadinasi, teiginys teisingas, kai $n = 3$.

Indukcijos žingsnis. Tarkime, kad bet kurio iškiliojo k – kampio įstrižainių skaičius yra $S(k) = \frac{k(k-3)}{2}$. Įrodysime, kad šiuo atveju šis teiginys teisingas ir tada, kai $n = k + 1$, t. y. kad iškiliojo $(k + 1)$ – kampio įstrižainių skaičius yra $S(k+1) = \frac{(k+1)(k-2)}{2}$.

Tarkime, kad $A_1 A_2 \ldots A_k A_{k+1}$ – iškilusis $(k + 1)$ – kampis. Nubrėžkime jo įstrižainę $A_1 A_k$. Norint rasti, kiek $(k + 1)$ – kampis $A_1 A_2 \ldots A_k A_{k+1}$ turi įstrižainių, reikia suskaičiuoti k – kampio $A_1 A_2 \ldots A_k$ įstrižaines ir prie turimo skaičiaus pridėti $k - 2$, t. y. $(k + 1)$ – kampio $A_1 A_2 \ldots A_k A_{k+1}$ įstrižaines, einančias iš viršūnės A_{k+1}, ir , be to, pridėti įstrižainę $A_1 A_k$. Taigi $S(k+1) = S(k) + k - 2 + 1 = \frac{k(k-3)}{2} + k - 1 = \frac{(k+1)(k-2)}{2}$. Vadinasi, teiginys yra teisingas su bet kuriuo n – kampiu.

Atsakymas – teiginys įrodytas.