

Matematinė indukcija. B dalis

Užuominos

1. Indukcinė bazė: kai $n = 1$, tai $(2^{1+2} \cdot 3^1 + 5 \cdot 1 - 4) = 25 : 25$, vadinasi, kai $n = 1$, teiginys teisingas. Indukcijos žingsnis. Tarkime, kad $(2^{k+2} \cdot 3^k + 5k - 4) : 25$ teiginys yra teisingas, kai $n = k$. Įrodysime, kad šiuo atveju teiginys $(2^{k+3} \cdot 3^{k+1} + 5(k+1) - 4) : 25 = (2^{k+3} \cdot 3^{k+1} + 5k + 1) : 25$ yra teisingas ir su kitu natūriniu skaičiumi $n = k + 1$. Iš tikrųjų $(2^{k+3} \cdot 3^{k+1} + 5k + 1) : 25 = (2 \cdot 3 (2^{k+2}) \cdot 3^k + 5k - 4) - 25k + 25 = (6 (2^{k+2} \cdot 3^k + 5k - 4) - 25 (k - 1)) : 25$. Kadangi sumos abu dėmenys dalijasi iš 25, todėl ir suma dalijasi iš 25.

2. Indukcinė bazė: kai $n = 1$, tai $1 + 2^1 + 2^{2 \cdot 1} = 7$, vadinasi, kai $n = 1$, teiginys teisingas. Kai $n = 2$, tai $1 + 2^2 + 2^{2 \cdot 2} = 21$, vadinasi, kai $n = 2$, teiginys teisingas. Indukcijos žingsnis. Tarkime, kad $1 + 2^m + 2^{2m}$ dalijasi iš 7, kai $m = 3k \pm 1$. Tada $1 + 2^{m+3} + 2^{2(m+3)} = (1 + 2^m + 2^{2m}) + (7 \cdot 2^m + 63 \cdot 2^{2m})$. Vadinasi, $2^{m+3} + 2^{2(m+3)}$ dalijasi iš 7, nes abu dėmenys dalijasi iš 7.

3. Indukcinė bazė: kai $n = 2$, tai $1 + \frac{1}{2^2} < 2 - \frac{1}{2}$, vadinasi, kai $n = 2$, teiginys teisingas. Indukcijos žingsnis. Tarkime, kad teiginys $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{k}$ yra teisingas, kai $n = k$. Įrodysime, kad šiuo atveju teiginys $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} < 2 - \frac{1}{k+1}$ yra teisingas ir su kitu natūriniu skaičiumi $n = k + 1$. Iš tikrųjų $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} < 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} < 2 - \frac{1}{(k+1)}$, kai $k \geq 2$.

4. Indukcinė bazė: kai $n = 3$, tai $2^{\frac{3(3-1)}{2}} > 3!$, vadinasi, kai $n = 3$, teiginys teisingas.

Indukcijos žingsnis. Tarkime, kad teiginys $2^{\frac{k(k-1)}{2}} > k!$ yra teisingas, kai $n = k$. Įrodysime, kad šiuo atveju teiginys $2^{\frac{k(k+1)}{2}} > (k+1)!$ yra teisingas ir su kitu natūriniu skaičiumi $n = k + 1$. Iš tikrųjų $2^{\frac{k(k+1)}{2}} = 2^{\frac{k(k-1)}{2}} \cdot 2^k > k! \cdot 2^k > k! \cdot (k+1)$, nes $2^k > k+1$, kai $k \geq 2$. Vadinasi, teiginys yra teisingas su visais natūraliaisiais skaičiais $n \geq 3$.

5. Iškiliojo n – kampio įstrižainių skaičių pažymėję $S(n)$, turime įrodyti teiginį $S(n) = \frac{n(n-3)}{2}$, kai $n \geq 3 \in \mathbb{N}$.

Indukcinė bazė: $n = 3$. $S(3) = \frac{3(3-3)}{2} = 0$. Vadinasi, teiginys teisingas, kai $n = 3$.

Indukcijos žingsnis. Tarkime, kad bet kurio iškiliojo k – kampio įstrižainių skaičius yra $S(k) = \frac{k(k-3)}{2}$.

Įrodysime, kad šiuo atveju šis teiginys teisingas ir tada, kai $n = k + 1$, t. y. kad iškiliojo $(k + 1)$ – kampio įstrižainių skaičius yra $S(k + 1) = \frac{(k+1)(k-2)}{2}$.

Tarkime, kad $A_1 A_2 \dots A_k A_{k+1}$ – iškilusis $(k + 1)$ – kampis. Nubrėžkime jo įstrižainę $A_1 A_k$. Norint rasti, kiek $(k + 1)$ – kampis $A_1 A_2 \dots A_k A_{k+1}$ turi įstrižainių, reikia suskaičiuoti k – kampio $A_1 A_2 \dots A_k$ įstrižaines ir prie turimo skaičiaus pridėti $k - 2$, t. y. $(k + 1)$ – kampio $A_1 A_2 \dots A_k A_{k+1}$ įstrižaines, einančias iš viršūnės A_{k+1} , ir, be to, pridėti įstrižainę $A_1 A_k$. Taigi $S(k + 1) = S(k) + k - 2 + 1 = \frac{k(k-3)}{2} + k - 1 = \frac{(k+1)(k-2)}{2}$. Vadinasi, teiginys yra teisingas su bet kuriuo n – kampiu.