Oilerio skrituliai

Įvadas

Mokytojui

Oilerio skritulių tema apima uždavinius, kuriems išspręsti braižomi Oilerio skrituliai. Tai uždaviniai apie susikertančias arba nesusikertančias aibes ir jų poaibius. Svarbu nuspręsti, kaip sudėlioti skritulius ir duomenis juose, kad tiksliai atitiktų uždavinio sąlygą, tuomet tolesnis uždavinio sprendimas tampa aiškus. Modulis labiausiai tinka 5–6 klasių mokiniams, tiesa, paskutiniai uždaviniai orientuoti į 7–8 klasių mokinius.

Mokiniui

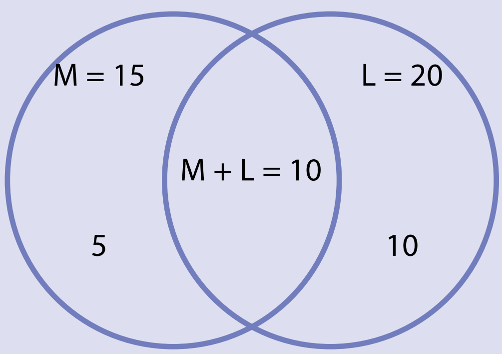
Sprendžiant uždavinius kartais padeda schemų braižymas. Vienos tokių schemų yra vadinamos Oilerio skrituliais. Oilerio skrituliuose pažymime sąlygoje duotas reikšmes, ir tai vaizdžiai padeda rasti reikalingus atsakymus.

Uždaviniai

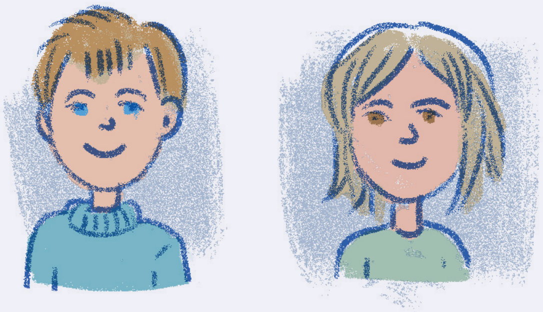
1. Klasėje visi mokiniai mėgsta matematikos arba lietuvių kalbos pamokas. Matematikos pamokas mėgsta 15 mokinių, lietuvių kalbos pamokas – 20 mokinių, o ir matematikos, ir lietuvių kalbos pamokas kartu – 10 mokinių. Kiek šioje klasėje iš viso mokinių?

Kaip spręsti?

Nusibraižome du susikertančius skritulius, kurių kairysis reiškia mokinius, mėgstančius matematikos pamokas, dešinysis – mokinius, mėgstančius lietuvių kalbos pamokas, o skritulių viduryje susikirtimas rodo mokinių, kurie mėgsta ir matematikos, ir lietuvių kalbos pamokas kartu, skaičių. Pagal sąlygoje duotus duomenis kairiajame skritulyje įrašome, kad matematikos pamokas mėgsta 15 mokinių, dešiniajame – kad lietuvių kalbos pamokas mėgsta 20 mokinių, o viduryje, skritulių sankirtoje, įrašome, kad matematikos ir lietuvių kalbos pamokas kartu mėgsta 10 mokinių. Kadangi iš 15-os mokinių, kurie mėgsta matematikos pamokas, dalis iš jų mėgsta ir lietuvių kalbos pamokas, todėl tų, kurie mėgta tik matematikos pamokas, yra 15 – 10 = 5 (įrašome 5 kairiojo skritulio apačioje). Tokiu pat principu įrašome skaičių mokinių, kuriems patinka lietuvių kalbos pamokos, – tarp tų 20-ties mokinių, kuriems šios pamokos patinka, yra ir tų, kurie mėgsta ir matematiką. Suskaičiuojame tuos mokinius, kuriems patinka tik lietuvių kalbos pamokos: 20 – 10 = 10 (įrašome 10 dešiniojo skritulio apačioje). Dabar nesunkiai galime suskaičiuoti, kiek klasėje yra mokinių iš viso: 5 (mėgsta tik matematiką) +10 (mėgsta tik lietuvių kalbą) +10 (mėgsta ir matematiką, ir lietuvių k.) = 25.

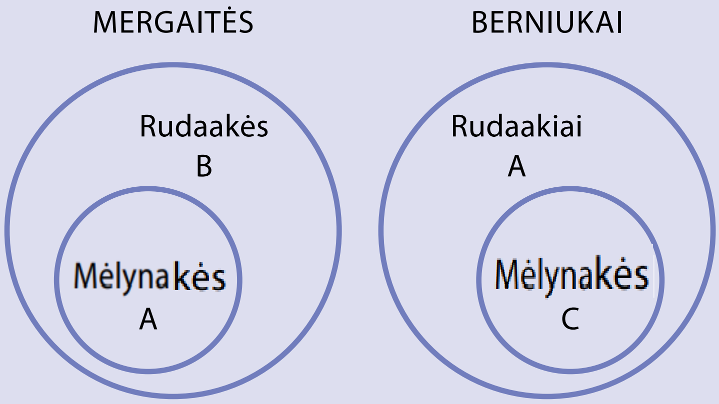


Oilerio skrituliai



2. Žaidimų aikštelėje žaidžia mėlynakių ir rudaakių vaikų. Tarp jų mėlynakių mergaičių yra tiek pat, kiek ir rudaakių berniukų. Ar tiesa, kad šioje žaidimų aikštelėje žaidžia tiek pat berniukų, kiek ir mėlynakių vaikų?

Kaip spręsti?

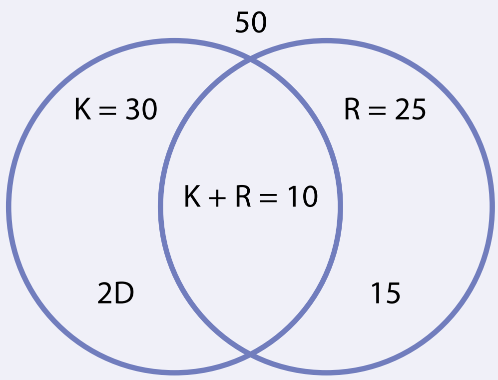


Šį kartą nusibraižome du nesusikertančius skritulius, kurių vienas reikš mergaites, o kitas – berniukus. Mergaičių skritulyje dar nubraižome mažesnį skritulį, kuris reikš mėlynakes mergaites, – tokiu atveju likusi didelio skritulio dalis iliustruos rudaakių mergaičių skaičių. Lygiai taip pat ir berniukų skritulyje nusibraižome mažesnį skritulį, kuris reikš mėlynakius berniukus, o likusi didelio skritulio dalis atspindės rudaakių berniukų skaičių. Kadangi sąlygoje nurodyta, kad mėlynakių mergaičių yra tiek pat, kiek rudaakių berniukų, tai skrituliuose šias savybes pažymėkime vienoda raide, pavyzdžiui, A. Kitas savybes galime pažymėti kitomis raidėmis, pavyzdžiui, rudaakes mergaites pažymime raide B, o mėlynakius berniukus pažymime raide C. Uždavinio sąlygoje klausiama, ar iš viso berniukų yra tiek pat, kiek mėlynakių vaikų. Iš apskritimų matome, kad berniukų ir viso yra A (rudaakiai) + C (mėlynakiai), o mėlynakių vaikų irgi yra A (mergaitės) + C (berniukai). Taigi, šioje žaidimų aikštelėje žaidžia tiek pat berniukų, kiek ir mėlynakių vaikų (A + C).

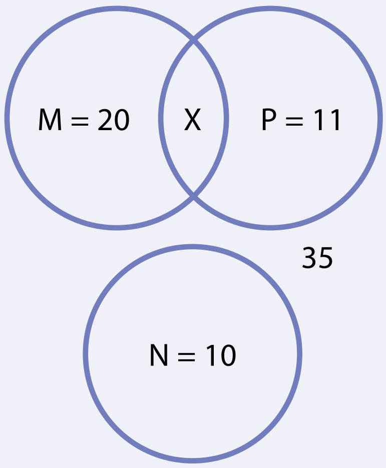
3. Saldainių dėžutėje yra 50 saldainių, iš kurių 30 yra karameliniai, 25 – riešutiniai, 10 – ir karameliniai ir riešutiniai, o likę – kokosiniai. Kiek yra kokosinių saldainių?

P. Užuomina – karameliniams ir riešutiniams saldainiams nubraižykite du susikertančius skritulius, o kokosiniams saldainiams skritulio braižyti nereikia.

Atsakymas – nusibraižome du susikertančius skritulius, kurių kairysis reiškia karamelinius saldainius, dešinysis – riešutinius saldainius, o skritulių susikirtimas viduryje reiškia saldainius, kurie yra kartu ir karameliniai, ir riešutiniai. Pagal sąlygoje duotus duomenis kairiajame skritulyje įrašome, kad karamelinių saldainių yra 30, dešiniajame – kad riešutinių saldainių yra 25, o viduryje, skritulių sankirtoje, įrašome, kad ir karamelinių, ir riešutinių saldainių yra 10. Viršuje užrašome, kad iš viso yra 50 saldainių. Kadangi iš 30-ies karamelinių saldainių dalis iš jų yra ir riešutiniai, todėl vien tik karamelinių saldainių yra 30 – 10 = 20 (įrašome 20 kairiojo skritulio apačioje). Tokiu pat būdu pažymime ir riešutinių saldainių kiekį – tarp tų 25-ties riešutinių saldainių yra ir karamelinių. Suskaičiuojame vien tik riešutinius saldainius: 25 – 10 = 15 (įrašome 15 dešiniojo skritulio apačioje). Dabar nesunkiai galime suskaičiuoti, kiek yra kokosinių saldainių: 50 (visi saldainiai) – 20 (karameliniai) – 15 (riešutiniai) – 10 (karameliniai ir riešutiniai) = 5.

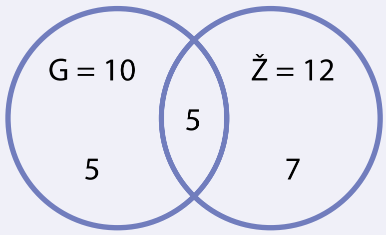


4. Klasėje mokosi 35 mokiniai. Iš jų 20 lanko matematikos būrelį, 11 – piešimo, o 10 nelanko nė vieno iš šių būrelių. Kiek matematikų taip pat ir piešia?



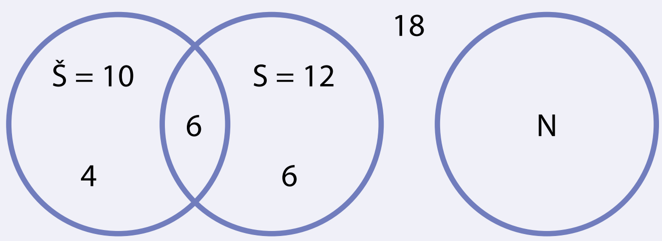
Atsakymas – lankančiuosius tiek matematikos, tiek piešimo būrelius pažymėkime x. Tada 20 – x +11 – x + x +10 = 35, išeina, kad x = 6.

5. Lukas turi kortelių, kurių kiekviena pusė arba žalia, arba geltona. Kortelių su geltona puse yra 10, su žalia puse – 12, kortelių su skirtingų spalvų pusėmis – 5. Kiek Lukas turi kortelių, kurių abi pusės yra vienos spalvos?



Atsakymas – kortelių su abiem geltonomis spalvomis yra 10 – 5 = 5, su abiem žaliomis spalvomis yra 12 – 5 = 7, taigi vienspalvių kortelių iš viso yra 5 + 7 = 12.

6. Į žygį susiruošė 18 penktokų. Iš jų 10 pasiėmė po šokoladą, 12 – po sumuštinį. Kiek penktokų nepasiėmė jokių užkandžių, jei žinoma, kad 6 buvo pasiėmę ir šokoladą, ir sumuštinį.

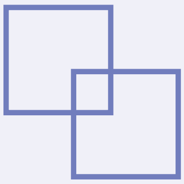


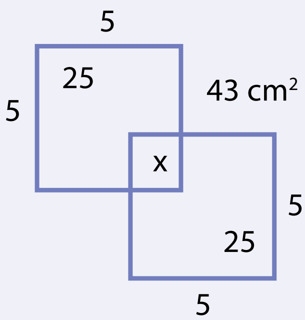
Atsakymas – N = 18 – 4 – 6 – 6 = 2.

Oilerio skrituliai

7. Ant stalo padėtos dvi kvadratinės servetėlės, kurių kraštinės lygios 5 cm. Jos padėtos viena ant kitos taip, kaip parodyta paveikslėlyje. Servetėlės uždengė stalo plotą, lygų 43 cm^2. Kokį plotą dengia persidengianti servetėlių dalis?

P. Užuomina – įsivaizduokite, kad Oilerio skrituliai šį kartą yra kvadratai.

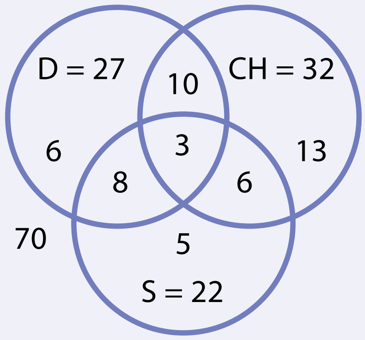




Atsakymas – kiekvieno kvadrato plotas yra 5 x 5 = 25 cm^2. Jei persidengianti kvadratų dalis yra x, tai 25 – x + 25 – x + x = 43, ir x = 7.

8. Mokinių vasaros stovykloje atostogauja 70 vaikų. Iš jų 27 dalyvauja dramos būrelyje, 32 dainuoja chore, 22 domisi sportu. Dramos būrelyje yra 10 vaikų iš choro, chore yra 6 sportininkai, dramos būrelyje taip pat yra 8 sportininkai, o 3 sportininkai lanko ir dramos būrelį, ir chorą.

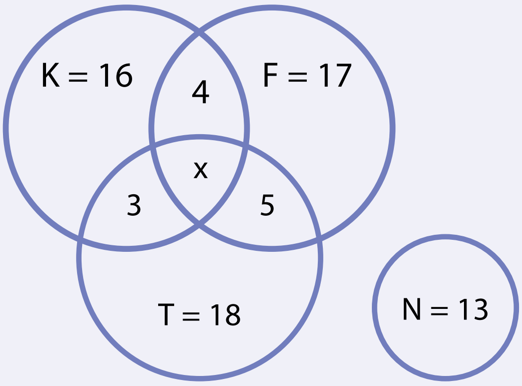
a) Kiek vaikų tik sportuoja?
b) Kiek vaikų nedainuoja chore, nesidomi sportu ir nedalyvauja dramos būrelyje?



Atsakymas:
a) 22 – 6 – 3 – 8 = 5;
b) 70 – (6 + 13 + 5 + 8 + 10 + 6 + 3) = 19.

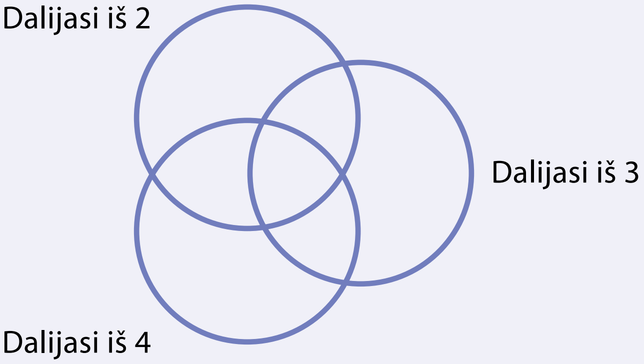
9. Mokykloje iš viso yra 52 septintokai. Iš jų 16 žaidžia krepšinį, 17 – futbolą, 18 – tinklinį. Dviem sporto rūšimis – krepšiniu ir futbolu – domisi 4, krepšiniu ir tinkliniu – 3, tinkliniu ir futbolu – 5 septintokai, o 13 nesidomi nei krepšiniu, nei futbolu, nei tinkliniu.

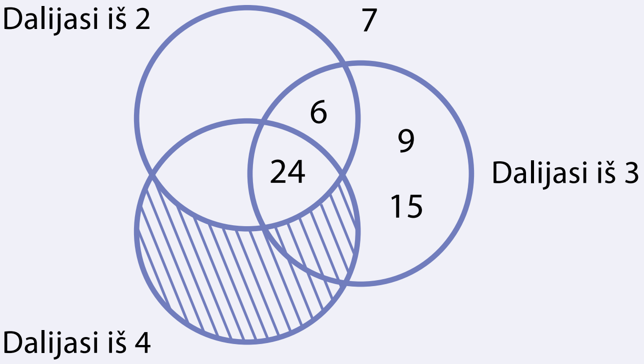
a) Kiek septintokų domisi trimis sporto šakomis?
b) Kiek septintokų domisi tik viena sporto šaka?



Atsakymas:
a) Tegu besidomintys visomis trimis sporto šakomis būna pažymėti x. Tada 16 – 4 – 3 – x + 17 – 4 – 5 – x + 18 – 3 -5 – x + 3 + 4 + 5 +x + 13 = 52, taigi iš čia x = 0;
b) 16 – 4 – 3 + 17 – 4 – 5 + 18 – 3 – 5 = 27.

10. Diagramoje surašykite skaičius 6, 7, 9, 15 ir 24 taip, kad kiekviename skritulyje atsirastų tik tie skaičiai, kurie pasižymi prie atitinkamo skritulio užrašyta savybe. Taip pat diagramoje užtušuokite tas dalis, į kurias negali patekti nei vienas natūralusis skaičius.

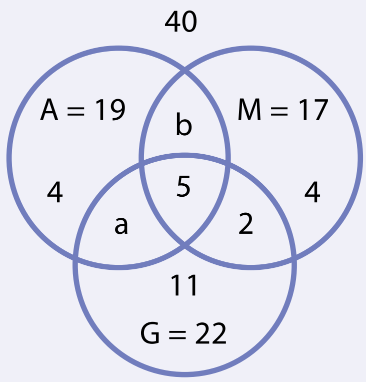




Atsakymas – norint patenkinti visas tris sąlygas, skaičiai skrituliuose turi būti išdėstyti taip, kaip parodyta paveikslėlyje. Skaičius 7 nepatenka nei į vieną skritulį. Užtušuotose vietose nepatenka joks natūralusis skaičius, nes visi, kurie dalijasi iš 4, taip pat dalijasi ir iš 2.

11. Klasėje mokosi 40 mokinių, iš kurių 19 gavo dešimtukų iš anglų kalbos, 17 – iš matematikos, 22 – iš gamtos pažinimo. Tik iš vieno dalyko dešimtukų gavo: anglų kalbos – 4, matematikos – 4, gamtos pažinimo – 11 mokinių. Septyni mokiniai gavo dešimtukų iš matematikos ir gamtos pažinimo. Penki iš jų dar gavo dešimtukų ir iš anglų kalbos.

a) Kiek mokinių neturi dešimtukų?
b) Kiek mokinių mokosi dešimtukais du dalykus iš trijų?



Atsakymas:

a) Apskaičiuokime a ir b reikšmes:

Iš gamtos pažinimo dešimtukų gavo 22 mokiniai: 22 = 11 + 2 + 5 +a, taigi a = 4;

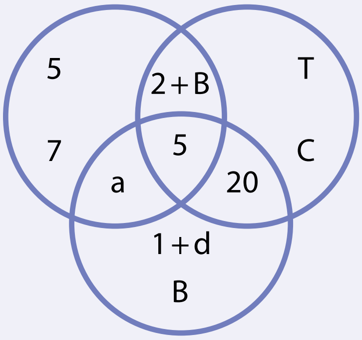
Iš anglų kalbos dešimtukų gavo 19 mokinių: 19 = 4 + 4 + 5 + b, taigi b = 6.

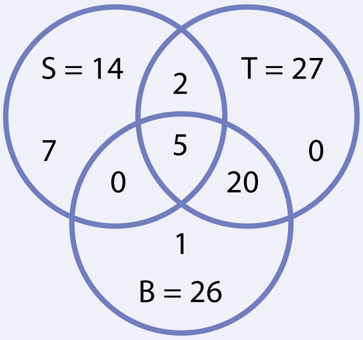
Nei vieno dešimtuko negavo:
40 – (4 + 4 + 11 + 2 + 4 + 6 + 5) = 4.

b) 2 + 4+ 6 = 12.

12. Klasėje mokosi 35 mokiniai. Visi jie arba groja smuiku, arba augina triušius, arba plaukioja baseine. Daugelis jų užsiima ir vienu, ir kitu. Daugiausia plaukikų – triušių augintojų – 25, iš kurių 5 dar groja smuiku. Klasės plaukimo čempionas smuiku negroja ir triušių neaugina, o du jo draugai – triušių augintojai – plaukti nemoka, bet užtat puikūs smuikininkai. Tarp smuikininkų yra 7 mokiniai, kurie neplaukioja ir neaugina triušių.

a) Kiek klasėje smuikininkų?
b) Kiek vaikų lanko baseiną?
c) Kiek triušių augintojų nesidomi plaukimu ir muzika?



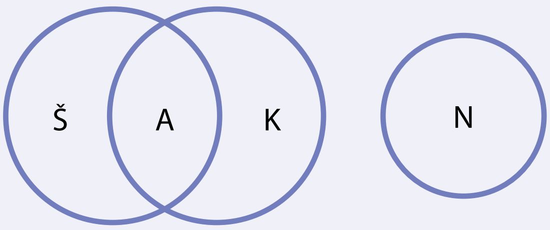


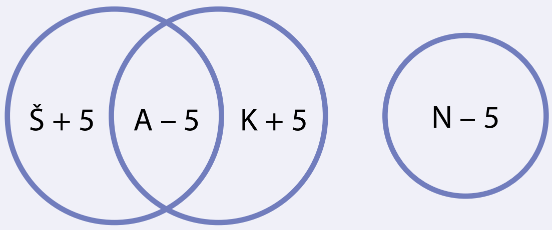
Atsakymas:
Iš pradžių apskaičiuokime nežinomus dydžius a, b, c ir d: 7 + a + 5 + 2 + b + c + 20 + 1 + d = 35, iš čia 35 + a + b + c + d = 35, vadinasi, a = b = c = d = 0.

a) 7 + 5 + 2 = 14;
b) 20 + 5 + 1 = 26;
c) 0.

---

13. Pernai kai kurie iš gyvūnų mylėtojų klubo narių namie laikė šunų, kai kurie – kačių, kai kurie – ir šunų, ir kačių. Šiemet laikančiųjų šunų ir laikančiųjų kačių skaičius nepasikeitė, bet laikančiųjų ir šunų, ir kačių skaičius sumažėjo 5-iais asmenimis. Kaip per metus pasikeitė skaičius tų gyvūnų mylėtojų, kurie namuose nelaiko nei šunų, nei kačių?



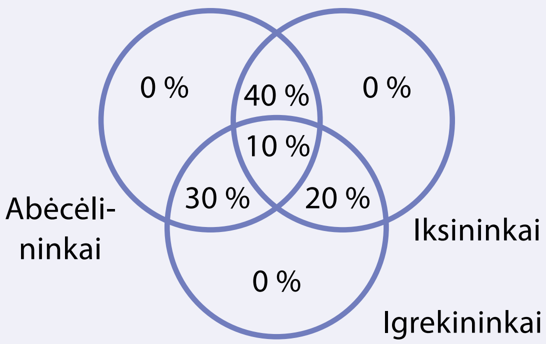


Atsakymas – šunų iš viso laiko Š + A klubo narių, o kačių – K + A. Jei tiek šunų, tiek kačių laikančiųjų skaičius sumažėjo 5, o iš viso laikančiųjų šunų arba iš viso laikančiųjų kačių skaičius nepasikeitė, tai Oilerio skrituliuose šunų ir kačių skrituliuose išlyginame skaičių, pridėję po 5 (kad būtų ta pati suma Š + A ir K + A). Tokiu atveju, jei klubo narių skaičius nepasikeitė, tai nelaikančiųjų nei šunų, nei kačių skaičius turėtų irgi sumažėti 5.

---

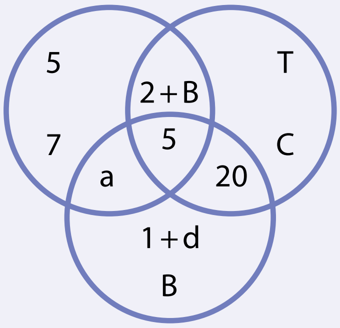
14. *Ikslendo* šalyje kiekvienas gyventojas moka bent vieną iš trijų kalbų – *abėcėlininkų*, *iksininkų* arba *igrekininkų*. *Abėcėlininkų* kalbą moka 80 proc. gyventojų, *iksininkų* – 70 proc., o *igrekininkų* – 60 proc. gyventojų. Kiek šioje šalyje gyventojų galėtų mokėti visas tris kalbas – nustatykite mažiausią galimą procentą gyventojų, mokančių visas tris kalbas.

P. Užuomina – pirma apskaičiuokite, kiek gali būti daugiausiai gyventojų, kurie nemoka bent vienos kalbos.



Atsakymas – 10 proc. Atkreipkime dėmesį, kad 20 proc. gyventojų nemoka *abėcėlininkų* kalbos, 30 proc. nemoka *iksininkų* kalbos ir 40 proc. nemoka *igrekininkų* kalbos. Skaičius gyventojų, kurie nemoka bent vienos kalbos, negali viršyti 20 + 30 + 40 = 90 proc. Vadinasi, mažiausiai 10 proc. gyventojų moka visas tris kalbas. Pavyzdys, kad toks variantas įmanomas, pateiktas paveikslėlyje.

15. Trys žaidėjos užrašo po 100 skirtingų žodžių, paskui žodžių sąrašus palygina. Jei kuris nors žodis pasikartoja bent dviejų žaidėjų sąrašuose, jis išbraukiamas iš visų sąrašų. Ar gali taip būti, kad pirmosios žaidėjos sąraše liko 54 žodžiai, antrosios – 75 žodžiai, o trečiosios – 80 žodžių?



Atsakymas – pasikartojančius kiekvienos žaidėjos žodžius galima surašyti į tris lygtis:

$a + b + d = 100 – 54 = 46$
$b + c + d = 100 – 75 = 25$
$a + c + d = 100 – 80 = 20$

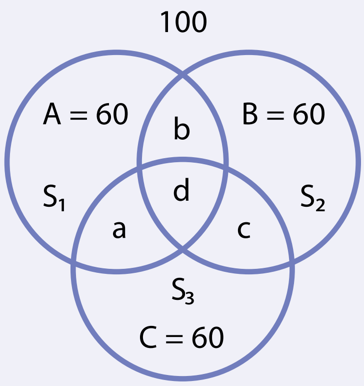
Visas tris lygtis sudedame ir turime
$2a + 2b + 2c + 3d = 91.$

Dabar pirmą lygtį padauginame iš 2
$a + b + d = 46 / x\ 2$

$2a + 2b + 2d = 92$ ir gautą lygtį atimame iš lygties $2a + 2b + 2c + 3d = 91$. Suskaičiuojame $2c + d = –1$, iš čia $d = –1– 2c$, o neigiamų skaičių gauti negalime, vadinasi, uždavinio atsakymas – taip būti negali. Turime $2c + d= –1$, iš čia $d = –1 – 2c$, o neigiamų skaičių gauti negalime, vadinasi, uždavinio atsakymas – taip būti negali.

---

16. Trys draugai – Adomas, Benediktas ir Celestinas – kartu išsprendė 100 matematikos uždavinių. Kiekvienas iš jų išsprendė po 60 uždavinių. Laikykime uždavinį sunkiu, jei jį išsprendė tik vienas iš draugų. Laikykime uždavinį lengvu, jei jį išsprendė visi trys draugai. Kiek skiriasi lengvų ir sunkių uždavinių skaičius?



Atsakymas – uždavinius, kuriuos išsprendė tik Adomas, pažymėkime s_1, uždavinius, kuriuos išsprendė tik Benediktas, pažymėkime s_2, ir tik Celestinas – s_3. Tuomet $s_1 + s_2 + s_3$ yra sunkių uždavinių skaičius, d – lengvų uždavinių skaičius.

Tada $s_1 + s_2 + s_3 + a + b + c + d = 100$. Kiekvieno iš draugų išspręstų uždavinių skaičių užrašome trimis lygtimis:

$s_1 + a + b + d = 60$

$s_2 + b + c + d = 60$

$s_3 + a + c + d = 60$

Sudėjus šias tris lygtis išeina
$s_1 + s_2 + s_3 + 2a + 2b + 2c + 3d = 180.$

Dabar pirmąją sudarytąją lygtį padauginame iš 2
$s_1 + s_2 + s_3 + a + b + c + d = 100 / x\ 2$

$2s_1 + 2s_2 + 2s_3 + 2a + 2b + 2c + 2d = 200$ ir iš jos atimame lygtį $s_1 + s_2 + s_3 + 2a + 2b + 2c + 3d = 180$.

Suskaičiuojame $s_1 + s_2 + s_3 – d = 20$, iš čia $d = s_1 + s_2 + s_3 – 20$. d reprezentuoja lengvus uždavinius, $s_1 + s_2 + s_3$ reprezentuoja sunkius uždavinius. Vadinasi, sunkių uždavinių yra 20-čia daugiau.

Kuriame Lietuvos ateitį
2014–2020 metų Europos Sąjungos fondų investicijų veiksmų programa