

# MATEMATIKA

## Valstybinio brandos egzamino užduotis

Pakartotinė sesija

2023 m. liepos 3 d.

Egzamino trukmė – 3 val. (180 min.)

### NURODYMAI

1. Gavę užduoties sąsiuvinį, jo priedą ir atsakymų lapą, pasitikrinkite, ar juose nėra tuščių lapų arba kito aiškiai matomo spausdinimo broko. Pastebėję praneškite egzamino vykdytojui.
2. **Įsitikinkite, kad ant jūsų atsakymų lapo užklijuotas kodas, kurio numeris sutampa su jūsų eilės numeriu egzamino vykdymo protokole.**
3. Bendrojo kurso uždaviniai arba jų dalys pažymėti **B→**.
4. Uždavinių sprendimus ir (ar) atsakymus pirmiausia galite rašyti užduoties sąsiuvinyje, kuriame yra palikta vietos juodraščiui. Jei neabejojate dėl sprendimo ir (ar) atsakymo, iš karto rašykite atsakymų lape. **Vertintojams bus pateikiamas tik atsakymų lapas!**
5. Per egzaminą galite rašyti juodai rašančiu tušinuku, pieštuku, naudotis trintuku, braižybos ir matavimo įrankiais, skaičiuotuvu be tekstinės atminties.
6. **Atsakymų lape** rašykite ir braižykite **tik juodai** rašančiu tušinuku tvarkingai ir įskaitomai. Atsakymų lape nesinaudokite trintuku ir koregavimo priemonėmis.
7. Saugokite atsakymų lapą (neįplėškite ir nesulamdykite). Sugadintuose lapuose įrašyti atsakymai nebus vertinami.
8. Stenkitės išspręsti kuo daugiau uždavinių, neatsižvelgdami į tai, pagal kurio kurso (bendrojo ar išplėstinio) programą dalyko mokėtės mokykloje. Neišsprendę kurio nors uždavinio, nenusiminkite ir stenkitės išspręsti kitus.
9. Pasirinktus **I dalies** uždavinių atsakymus atsakymų lape pažymėkite kryželiu (žymėkite tik vieną atsakymo variantą). Jei pažymėsite neaiškiai arba daugiau kaip vieną atsakymo variantą, tas uždavinys bus vertinamas 0 taškų. Suklydę atsakymą galite taisyti atsakymų lape nurodytoje vietoje.
10. **II dalies** uždavinių atsakymus įrašykite tam skirtoje atsakymų lapo vietoje.
11. **III dalies** uždavinių sprendimus ir atsakymus įrašykite tam skirtoje atsakymų lapo vietoje. Už ribų parašyti sprendimai ir atsakymai nebus vertinami. **III dalyje pateiktas atsakymas be sprendimo bus vertinamas 0 taškų.**
12. Atsakymų lape neturi būti užrašų ar kitokių ženklų, kurie leistų identifikuoti darbo autorių.
13. Pasibaigus egzaminui, užduoties sąsiuvinį galite pasiimti.

Linkime sėkmės!

## I dalis

Kiekvienas šios dalies uždavinys (01–10) turi tik vieną teisingą atsakymą, vertinamą 1 tašku. Pasirinkite, jūsų nuomone, teisingą atsakymą ir pažymėkite jį atsakymų lape kryželiu.

**B→01.**  $(-\infty; 1) \cap (-2; 1] =$

**A**  $(-2; 1)$

**B**  $(-2; 1]$

**C**  $(-\infty; 1)$

**D**  $(-\infty; 1]$

*Juodraštis*

**B→02.** Pasirašius terminuotojo indėlio sutartį, bankas moka 4,3 % sudėtinės metinės palūkanas, kasmet pridedamas prie indėlio vertės. Apskaičiuokite, kokia bus indėlio vertė (suapvalinta iki sveikojo skaičiaus) po ketverių metų, jei pradinio indėlio vertė lygi 770 Eur.

**A** 911 Eur

**B** 902 Eur

**C** 874 Eur

**D** 869 Eur

*Juodraštis*

**B→03.** Vandens siurblys ritinio<sup>1</sup> formos baseiną, kurio aukštis lygus 1 m, o pagrindo spindulio ilgis lygus 2 m, pripildo per 3 val. Per kiek valandų šis vandens siurblys, dirbdamas tokiu pačiu pajėgumu, pripildys kitą ritinio formos baseiną, kurio aukštis ir pagrindo spindulio ilgis dvigubai didesni? Siurblys dirba tolygiai, t. y. per vienodus laikotarpius pripildo vandeniu vienodus tūrius.

**A** 6 val.

**B** 9 val.

**C** 12 val.

**D** 24 val.

*Juodraštis*

**B→04.** Kuri iš pateiktų funkcijų yra mažėjančioji savo apibrėžimo srityje?

**A**  $f(x) = \sqrt{x}$

**B**  $g(x) = \sin x$

**C**  $k(x) = 0,5^x$

**D**  $h(x) = \log_2 x$

*Juodraštis*

<sup>1</sup> ritinys – walec – цилиндр

**B→05.** Duota imtis<sup>2</sup>: 1; 2;  $x$ ;  $y$ ; 10; 11 (čia imties duomenys užrašyti didėjančiai). Yra žinoma, kad šios imties mediana lygi 4,5. Apskaičiuokite šios imties duomenų vidurkį.

**A** 4,5

**B** 4,8

**C** 5,5

**D** 5,7

*Juodraštis*

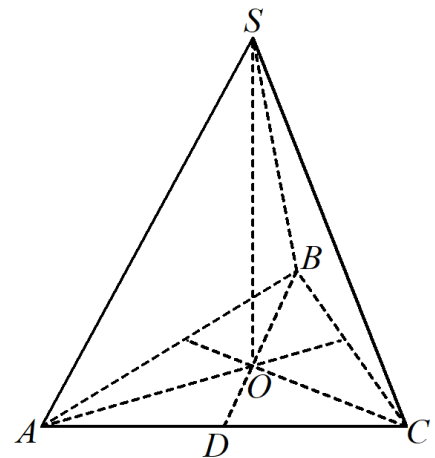
**B→06.** Paveiksle pavaizduota taisyklingoji trikampė piramidė<sup>3</sup>  $SABC$ .  $SO$  yra piramidės aukštinė. Piramidės briauna  $SA$  su pagrindo plokštuma  $ABC$  sudaro:

**A**  $\angle SAC$

**B**  $\angle SAO$

**C**  $\angle SDA$

**D**  $\angle SOA$



*Juodraštis*

**07.** Pertvarkę reiškini  $2^n \cdot 4^n \cdot 8^n$ , gausime:

**A**  $2^{6n}$

**B**  $2^{6n^3}$

**C**  $2^{3n+3}$

**D**  $2^{n+n^2+n^3}$

*Juodraštis*

<sup>2</sup> imtis – próba – выборка

<sup>3</sup> taisyklingoji trikampė piramidė – ostrosłup prawidłowy trójkątny – правильная треугольная пирамида

08. Nustatykite, keliuose taškuose susikerta funkcijų  $f(x) = \sin x$  ir  $g(x) = \frac{1}{3}$  grafikai, kai  $x \in [0; 5\pi]$ .

A 3

B 4

C 5

D 6

*Juodraštis*

09. Raskite funkcijos  $f(x) = 1 - 3x^2$  pirmąją funkciją<sup>4</sup>  $F(x)$ , jeigu yra žinoma, kad  $F(2) = 0$ .

A  $F(x) = -x^3$ B  $F(x) = 8 - x^3$ C  $F(x) = x - x^3$ D  $F(x) = x - x^3 + 6$ 

*Juodraštis*

10. Lygiakraščio trikampio<sup>5</sup> kraštinės ilgis lygus  $a$ , o į šį trikampį įbrėžto apskritimo spindulio<sup>6</sup> ilgis lygus  $r$ . Kuria lygybe teisingai užrašyta  $a$  priklausomybė nuo  $r$ ?

A  $a = \sqrt{3}r$ B  $a = 2\sqrt{3}r$ C  $a = 4\sqrt{3}r$ D  $a = 6\sqrt{3}r$ 

*Juodraštis*

<sup>4</sup> pirmąją funkcija – funkcja pierwotna – первообразная функция

<sup>5</sup> lygiakraštis trikampis – trójkąt równoboczny – равносторонний треугольник

<sup>6</sup> apskritimo spindulys – promień okręgu – радиус окружности

## II dalis

Kiekvieno šios dalies uždavinio (11–18) ar jo dalies teisingas atsakymas vertinamas **1 tašku**. Išspręskite uždavinius ir gautus atsakymus įrašykite į atsakymų lapą.

**B→11.** Duota funkcija  $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x - 8$ . Raskite šios funkcijos išvestinę  $f'(x)$ .

*Juodraštis*

**B→12.** Paveiksle pavaizduotas funkcijos  $y = f(x)$  grafikas.

**12.1.** Nustatykite funkcijos  $y = f(x)$  apibrėžimo sritį<sup>7</sup>.

*Juodraštis*

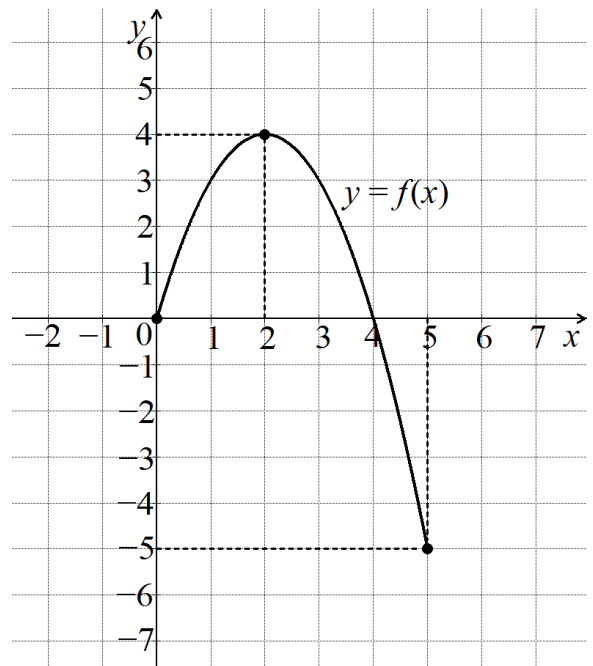
**12.2.** Nustatykite funkcijos  $y = f(x)$  mažiausią reikšmę.

*Juodraštis*

**12.3.** Nustatykite funkcijos  $y = g(x)$  reikšmių sritį<sup>8</sup>, jei

$$g(x) = f(x) + 2.$$

*Juodraštis*



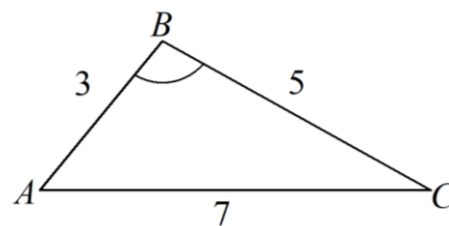
<sup>7</sup> apibrėžimo sritis – dziedzina – область определения

<sup>8</sup> reikšmių sritis – zbiór wartości – область значений

**B→13.** Paveiksle pavaizduotas trikampis  $ABC$ . Yra žinoma, kad

$$AB = 3, BC = 5 \text{ ir } AC = 7. \text{ Apskaičiuokite } \cos \angle ABC.$$

*Juodraštis*



- 14.** Dėžėje yra vienodo dydžio baltų, juodų ir raudonų rutulių. Atsitiktinai iš dėžės traukiant vieną rutulį, tikimybė<sup>9</sup> ištraukti baltą rutulį lygi 0,35, o tikimybė ištraukti juodą rutulį lygi 0,4.

**B→14.1.** Apskaičiuokite tikimybę, kad, atsitiktinai iš dėžės traukiant vieną rutulį, ištrauktas rutulys bus raudonas.

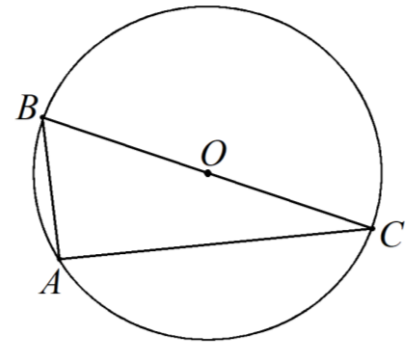
*Juodraštis*

- 14.2.** Iš dėžės atsitiktinai traukiamas vienas rutulys ir vieną kartą metamas šešiasienis standartinis žaidimo kauliukas. Įvykis  $A$  – „iš dėžės bus ištrauktas juodas rutulys, o kauliuko atvirtusių akučių skaičius bus dalus iš trijų“. Apskaičiuokite įvykio  $A$  tikimybę.

*Juodraštis*

<sup>9</sup> tikimybė – prawdopodobieństwo – вероятность

**B→15.** Paveiksle pavaizduotas trikampis  $ABC$ , kurio kraštinė  $BC$  yra apie šį trikampį apibrėžto apskritimo skersmuo. Šio apskritimo centras yra taškas  $O$ . Yra žinoma, kad  $\angle ACB = 15^\circ$  ir  $OC = 10$ .



**15.1.** Apskaičiuokite kampo  $ABC$  didumą.

*Juodraštis*

**15.2.** Apskaičiuokite trikampio  $AOC$  plotą<sup>10</sup>.

*Juodraštis*

**16.** Yra žinoma, kad funkcijos  $y = f(x)$  grafikas eina per tašką  $(2; 5)$  ir kad  $f'(2) = -3$ . Užrašykite šio grafiko liestinės<sup>11</sup> taške  $(2; 5)$  lygtį.

*Juodraštis*

**17.** Suprastinkite  $\frac{\sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha}{\cos(2\alpha)}$ .

*Juodraštis*

**18.** Kvadratinė lygtis  $x^2 + px + q = 0$  turi du skirtingus realiuosius sprendinius  $x = a$  ir  $x = b$ .

Išreikškite  $a^2 + b^2 + ab$  per  $p$  ir  $q$ .

*Juodraštis*

<sup>10</sup> plotas – pole – площадь

<sup>11</sup> liestinė – styczná – касательная

**III dalis**

*Išspręskite 19–26 uždavinius. Sprendimus ir atsakymus perrašykite į atsakymų lapą.*

- B→19.** Per biologijos praktinį darbą buvo tiriama, kaip kinta vaisinių muselių populiacijos dydis. Nustatyta, kad populiacijos dydį  $m(t)$  – muselių skaičių po  $t$  valandų – galima apskaičiuoti pagal formulę  $m(t) = 20 \cdot 3^{0,25t}$ ; čia  $t \geq 0$ .

**19.1.** Apskaičiuokite vaisinių muselių skaičių po 4 valandų.

*(1 taškas)*

*Juodraštis*

**19.2.** Nustatykite, po kelių valandų muselių skaičius bus lygus 4860.

*(2 taškai)*

*Juodraštis*

**20.** Koncertų salėje pirmojoje eilėje yra 25 vietos, o kiekvienoje kitoje eilėje yra dviem vietomis daugiau negu prieš tai buvusioje eilėje.

**B→20.1.** Apskaičiuokite, kiek iš viso yra vietų koncertų salės pirmosiose trijose eilėse.

*(1 taškas)*

*Juodraštis*



**B→20.2.** Nustatykite, kiek eilių būtų koncertų salėje, jeigu paskutinėje eilėje būtų 101 vieta.

(2 taškai)

*Juodraštis*

**20.3.** Įrodykite, kad jeigu koncertų salėje esančių eilių skaičius būtų dalus<sup>12</sup> iš 9, tai visų koncertų salėje esančių vietų skaičius būtų dalus iš 27.

(3 taškai)

*Juodraštis*

---

<sup>12</sup> dalus – podzielny – делимый

21. Išspręskite lygtis:

**B→21.1.**  $\log_2(x^2 - 1) = 3;$

(2 taškai)

*Juodraštis*

**21.2.**  $\sqrt{x+3} + 2x = 0.$

(3 taškai)

*Juodraštis*

**22.** Moneta metama tris kartus ir stebima, kuria puse ji kaskart atvirto – herbu ar skaičiumi.

Šio bandymo baigčių aibė gali būti užrašyta taip:

$$\{(S; S; S), (S; S; H), (S; H; H), \dots\}.$$

**B→22.1.** Apskaičiuokite tikimybę, kad moneta tris kartus atvirs ta pačia puse.

(2 taškai)

*Juodraštis*

**22.2.** Atsitiktinis dydis<sup>13</sup>  $X$  – „skaičius, kiek kartų moneta atvirto herbu“.

**22.2.1.** Užrašykite įvykiui  $X = 2$  palankių baigčių aibę ir apskaičiuokite  $P(X = 2)$ .

(2 taškai)

*Juodraštis*

**22.2.2.** Užpildykite atsitiktinio dydžio  $X$  skirstinio lentelę ir apskaičiuokite jo matematinę viltį<sup>14</sup>.

$m$	0	1	2	3
$P(X = m)$				

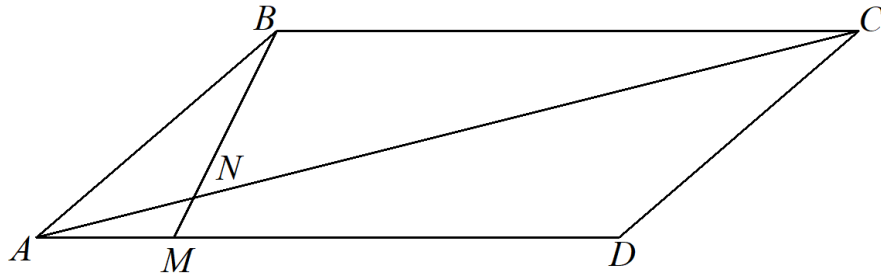
(2 taškai)

*Juodraštis*

<sup>13</sup> atsitiktinis dydis – zmienna losowa – случайная величина

<sup>14</sup> matematinė viltis – nadzieja matematyczna – математическое ожидание

- 23.** Lygiagretainio  $ABCD$  kraštinėje  $AD$  pažymėtas taškas  $M$ . Atkarpa  $BM$  kerta įstrižainę<sup>15</sup>  $AC$  taške  $N$  (žr. pav.). Yra žinoma, kad  $AM = \frac{1}{6}BC$ .



- 23.1.** Įrodykite, kad  $BN = \frac{6}{7}BM$ .

(2 taškai)

*Juodraštis*

- 23.2.** Pažymėkime  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ , o  $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ . Išreikškite vektorių  $\overrightarrow{BN}$  vektoriais  $\vec{a}$  ir  $\vec{b}$ .

(2 taškai)

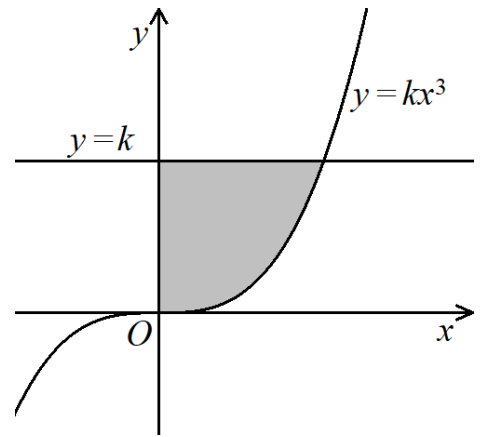
*Juodraštis*

<sup>15</sup> įstrižainė – przekątna – диагональ

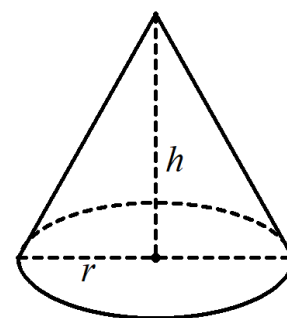
- 24.** Figūrą riboja funkcijos  $y = kx^3$  grafikas, tiesė  $y = k$  (čia  $k > 0$ ) ir  $Oy$  ašis (žr. pav.). Nustatykite, su kuria skaitine  $k$  reikšme šios figūros plotas bus lygus 6.

(4 taškai)

*Juodraštis*



- 25.** Paveiksle pavaizduoto kūgio šoninio paviršiaus<sup>16</sup> plotas yra  $S_{\text{son}} = 16\pi\sqrt{3}$ . Pažymėkime kūgio aukštinės ilgį  $h$ , o kūgio pagrindo spindulio ilgį  $r$ . Laikykite, kad  $1 \leq r \leq 5$ .



- 25.1.** Išreiškę kūgio aukštinės ilgį  $h$  per  $r$ , parodykite, kad šio kūgio tūrį<sup>17</sup> galima apskaičiuoti pagal formulę  $V(r) = \frac{1}{3}\pi r\sqrt{768 - r^4}$ .  
(3 taškai)

*Juodraštis*

- 25.2.** Parodykite, kad  $V'(r) = \frac{1}{3}\pi \frac{768 - 3r^4}{\sqrt{768 - r^4}}$ .

(2 taškai)

*Juodraštis*

- 25.3.** Nustatykite spindulio ilgio  $r$  reikšmę, su kuria šio kūgio tūris įgyja didžiausią reikšmę.

(2 taškai)

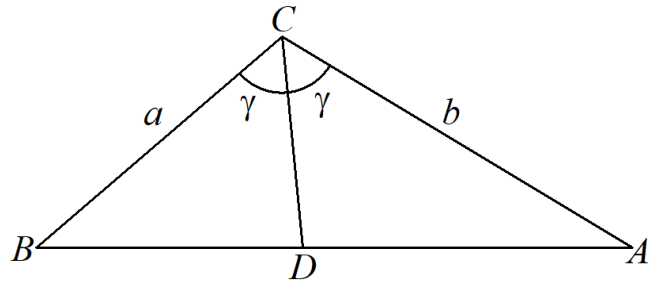
*Juodraštis*

<sup>16</sup> šoninis paviršius – powierzchnia boczna – боковая поверхность

<sup>17</sup> tūris – objętość – объём

- 26.** Yra žinoma, kad trikampio  $ABC$  kraštinės  $BC$  ilgis lygus  $a$ , kraštinės  $AC$  ilgis lygus  $b$  (čia  $a \neq b$ ), kampo  $ACB$  didumas lygus  $2\gamma$ , o  $CD$  yra trikampio pusiaukampinė<sup>18</sup> (žr. pav.).

Įrodykite, kad  $CD = \frac{2ab}{a+b} \cdot \cos \gamma$ .



(3 taškai)

*Juodraštis*

<sup>18</sup> pusiaukampinė – dwusieczna – биссектриса

*Juodraštis*