

MATEMATIKA

Valstybinio brandos egzamino užduotis

Pagrindinė sesija

2024 m. birželio 10 d.

Egzamino trukmė – 3 val. (180 min.)

NURODYMAI

1. Gavę užduoties sąsiuvinį, jo priedą ir atsakymų lapą, patikrinkite, ar juose nėra tuščių lapų arba kito aiškiai matomo spausdinimo broko. Pastebėję praneškite egzamino vykdytojui.
2. **Atsakymų lape įrašykite savo identifikavimo kodą, grupę ir vietą (eilės numerį protokole) ir pasirašykite.**
3. Bendrojo kurso uždaviniai arba jų dalys pažymėti **B→**.
4. Uždavinių sprendimus ir (ar) atsakymus pirmiausia galite rašyti užduoties sąsiuvinyje, kuriame yra palikta vietos juodraščiui. Jei neabejojate dėl sprendimo ir (ar) atsakymo, iš karto rašykite atsakymų lape. **Vertintojams bus pateikiamas tik atsakymų lapas!**
5. Per egzaminą galite rašyti juodai arba mėlynai rašančiu tušinuku, pieštuku, naudotis trintuku, braižybos ir matavimo įrankiais, skaičiuotuvu be tekstinės atminties.
6. **Atsakymų lape** rašykite ir braižykite **tik juodai arba mėlynai** rašančiu tušinuku tvarkingai ir įskaitomai. Atsakymų lape nesinaudokite trintuku ir koregavimo priemonėmis.
7. Saugokite atsakymų lapą (neįplėškite ir nesulamdykite). Sugadintuose lapuose įrašyti atsakymai nebus vertinami.
8. Stenkitės išspręsti kuo daugiau uždavinių, neatsižvelgdami į tai, pagal kurio kurso (bendrojo ar išplėstinio) programą dalyko mokėtės mokykloje. Neišsprendę kurio nors uždavinio, nenusiminkite ir stenkitės išspręsti kitus.
9. Pasirinktus **I dalies** uždavinių atsakymus atsakymų lape pažymėkite kryželiu (žymėkite tik vieną atsakymo variantą). Jei pažymėsite neaiškiai arba daugiau kaip vieną atsakymo variantą, tas uždavinys bus vertinamas 0 taškų. Suklydę atsakymą galite taisyti atsakymų lape nurodytoje vietoje.
10. **II dalies** uždavinių atsakymus įrašykite tam skirtoje atsakymų lapo vietoje.
11. **III dalies** uždavinių sprendimus ir atsakymus įrašykite tam skirtoje atsakymų lapo vietoje. Už ribų parašyti sprendimai ir atsakymai nebus vertinami. **III dalyje pateiktas atsakymas be sprendimo bus vertinamas 0 taškų.**
12. Atsakymų lape neturi būti užrašų ar kitokių ženklų, kurie leistų identifikuoti darbo autorių.
13. Pasibaigus egzaminui, užduoties sąsiuvinį galite pasiimti.

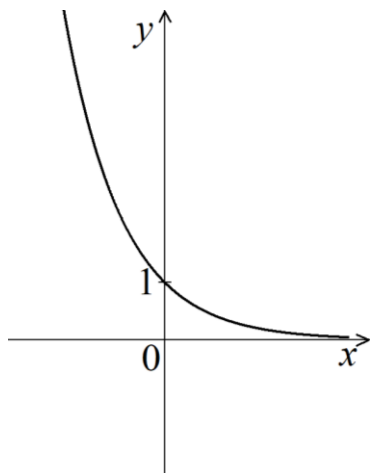
Linkime sėkmės!

I dalis

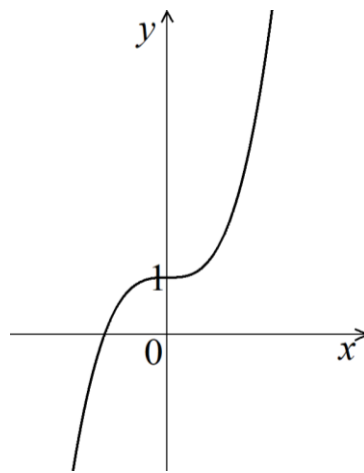
Kiekvienas šios dalies uždavinys (01–10) turi tik vieną teisingą atsakymą, vertinamą 1 tašku. Pasirinkite, jūsų nuomone, teisingą atsakymą ir pažymėkite jį atsakymų lape kryželiu.

B→01. Kuriame paveiksle pavaizduotas funkcijos $y = 3^x$ grafiko eskizas?

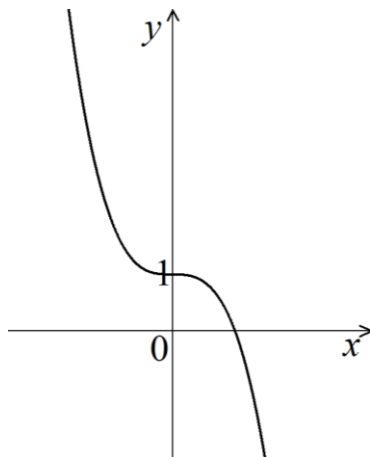
A



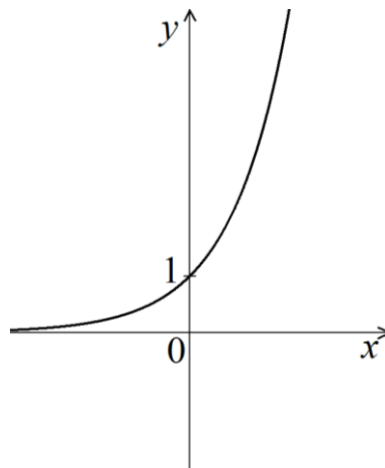
B



C



D



Juodraštis

B→02. Mokyklos mokiniai ruošia renginį. Buvo apklausti visi vienos klasės mokiniai, kiek valandų per savaitę kiekvienas iš jų skyrė renginiui ruošti. Lentelėje pateikti šios apklausos rezultatai.

| | | | | | |
|--|----|----|----|----|----|
| Laikas, kurį mokinys skyrė renginiui ruošti (val.) | 8 | 10 | 16 | 18 | 22 |
| Mokinių skaičius | 10 | 9 | 6 | 4 | 1 |

Apskaičiuokite, kiek vidutiniškai valandų per savaitę šios klasės mokinys skyrė renginiui ruošti.

A 16 val.

B 12 val.

C 10 val.

D 8 val.

Juodraštis

B→03. Kolegijos virtualiosios bibliotekos skaitytojo paskyros slaptažodis sudaromas iš keturių simbolių. Pirmasis slaptažodžio simbolis turi būti vienas iš penkių ženklų: &, *, #, \$, %, o kiti trys slaptažodžio simboliai turi būti trys skirtingi skaitmenys¹ (pvz., *012, %931 ir pan.). Kiek iš viso skirtingų slaptažodžių galima taip sudaryti?

A 5 000

B 3 645

C 3 600

D 2 520

Juodraštis

¹ skaitmuo – cyfra – цифра

B→04. Augustė nutarė lankyti trijų mėnesių vairavimo kursų. Pirmą mėnesį už šiuos kursus reikia mokėti 400,00 Eur, o kiekvieną kitą mėnesį 10% mažiau negu paskutinį prieš tai buvusį mėnesį. Apskaičiuokite, kiek Augustei iš viso kainuos šie trijų mėnesių vairavimo kursai.

- A** 1 180,00 Eur **B** 1 156,00 Eur **C** 1 084,00 Eur **D** 1 080,00 Eur

Juodraštis

B→05. Nustatykite reiškinio $\sqrt{x(x-4)}$ apibrėžimo sritį².

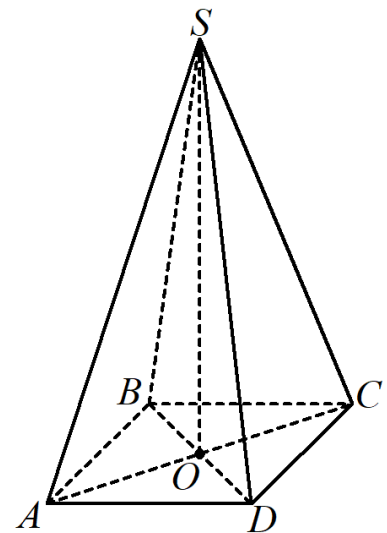
- A** $x \in (-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$
B $x \in (-\infty; 0] \cup [4; +\infty)$
C $x \in (4; +\infty)$
D $x \in [4; +\infty)$

Juodraštis

B→06. Paveiksle pavaizduota taisyklingoji keturkampė piramidė³ $SABCD$. Atkarpa SO yra piramidės aukštinė⁴. Piramidės briauna SA su pagrindo $ABCD$ plokštuma sudaro:

- A** kampą SAD
B kampą ASO
C kampą SAO
D kampą AOS

Juodraštis



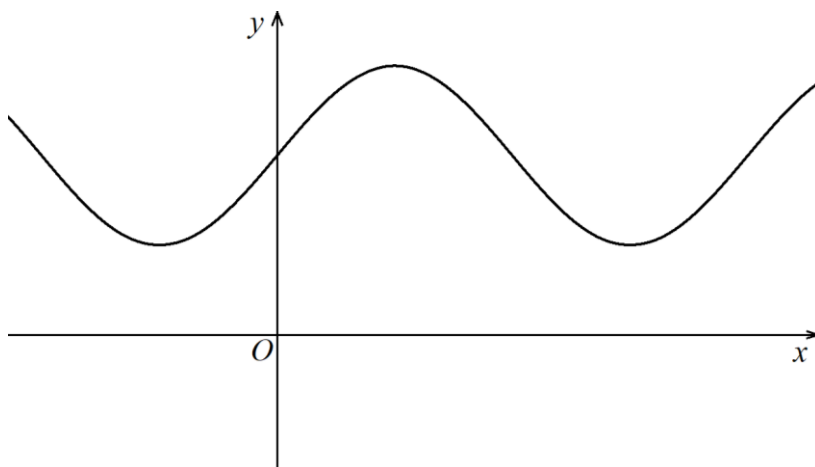
² apibrėžimo sritis – dziedzina – область определения

³ taisyklingoji keturkampė piramidė – ostrosłup prawidłowy czworokątny – правильная четырёхугольная пирамида

⁴ aukštinė – wysokość – высота

07. Paveiksle pavaizduotas vienos iš pateiktų funkcijų grafiko eskizas. Kurios?

- A $y = 2 + \sin x$
- B $y = \sin(x + 2)$
- C $y = \sin(2x)$
- D $y = 2 \sin x$

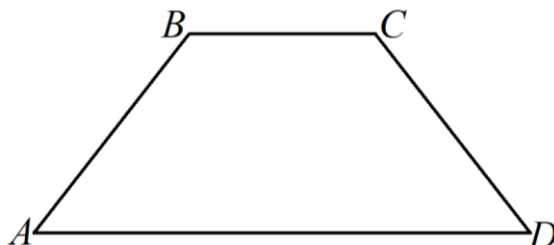


Juodraštis

08. Paveiksle pavaizduota lygiašonė trapecija⁵ $ABCD$. Yra žinoma, kad $AB = CD$, o $AD : BC = 3 : 1$.

Kuris teiginys apie vektorius yra teisingas?

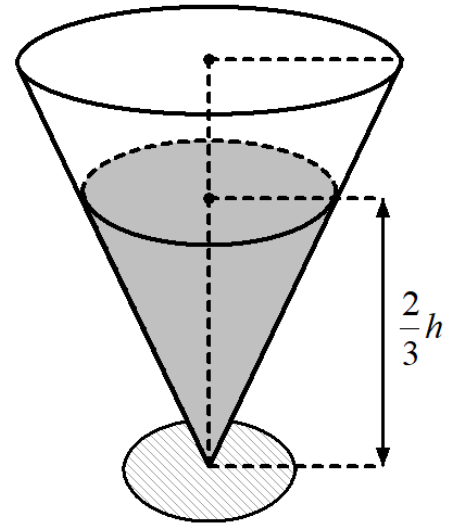
- A $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
- B $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{DC}$
- C $\overrightarrow{BC} = -3\overrightarrow{AD}$
- D $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{BC}$



Juodraštis

⁵ lygiašonė trapecija – trapez równoramienny – равнобедренная трапеция

- 09.** Ant stalo stovi kūgio⁶ formos vaza. Šio kūgio aukštinė, kurios ilgis h , statmena stalo horizontaliam paviršiui. Į vazą įpilta tiek vandens, kad jo paviršius yra $\frac{2}{3}h$ aukštyje nuo kūgio viršūnės. Nustatykite, kiek mililitrų vandens yra vazoje, jeigu jos talpa⁷ lygi 1350 ml.



- A** 400 ml
B 600 ml
C 700 ml
D 900 ml

Juodraštis

- 10.** Aritmetinės progresijos a_1, a_2, a_3, \dots skirtumas d yra pirminis skaičius⁸, didesnis už 2. Pasirenkami du šios aritmetinės progresijos nariai⁹ a_k ir a_m . Yra žinoma, kad $a_m - a_k = 28$. Apskaičiuokite $m - k$.

- A** $m - k = 2$
B $m - k = 4$
C $m - k = 7$
D $m - k = 14$

Juodraštis

⁶ kūgis – stożek – конус

⁷ talpa – objętość – емкость

⁸ pirminis skaičius – liczba pierwsza – простое число

⁹ aritmetinės progresijos nariai – wyrazy ciągu arytmetycznego – члены арифметической прогрессии

II dalis

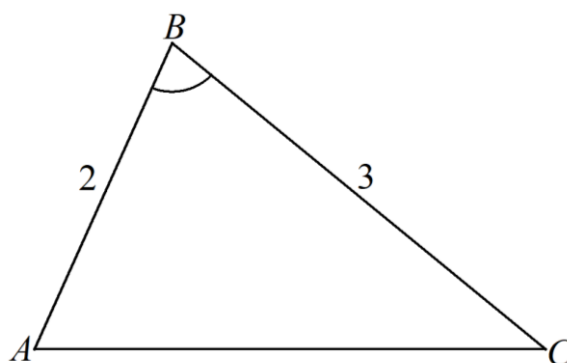
Kiekvieno šios dalies uždavinio (11–18) ar jo dalies teisingas atsakymas vertinamas **1 tašku**. Išspręskite uždavinius ir gautus atsakymus įrašykite į atsakymų lapą.

B→11. Duotos dvi skaičių aibės¹⁰: $A = \{1; 5; 8; 9; 14; 19; 20\}$ ir $B = \{1; 5; 7; 9; 12; 20\}$. Apskaičiuokite, kiek elementų priklauso aibių A ir B sankirtai ($A \cap B$).

Juodraštis

B→12. Paveiksle pavaizduotas trikampis ABC . Yra žinoma, kad $AB = 2$, $BC = 3$, $\cos \angle ABC = \frac{1}{6}$. Apskaičiuokite trikampio ABC kraštinės AC ilgį.

Juodraštis



B→13. Geometrinės progresijos n -tojo nario¹¹ formulė yra $b_n = \frac{1}{2} \cdot 5^{n-1}$; čia $n \in \mathbb{N}$.

13.1. Apskaičiuokite b_3 .

Juodraštis

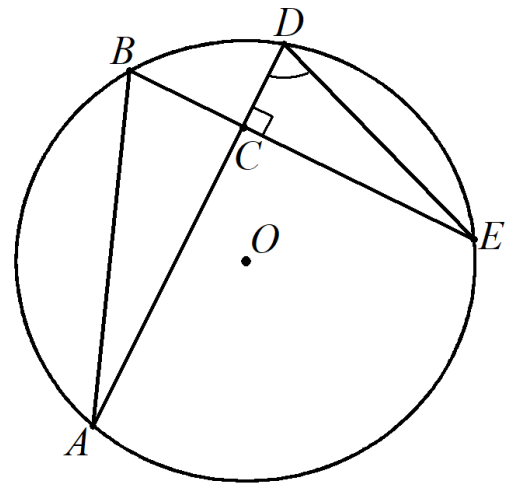
13.2. Apskaičiuokite šios geometrinės progresijos pirmųjų šešių narių sumą.

Juodraštis

¹⁰ aibė – zbiór – множество

¹¹ geometrinės progresijos narys – wyraz ciągu geometrycznego – член геометрической прогрессии

14. Paveiksle pavaizduoto apskritimo, kurio centras yra taškas O , stygos AD ir EB susikerta taške C . Yra žinoma, kad šios stygos statmenos ir $\angle ADE = 60^\circ$.



B→14.1. Apskaičiuokite kampo BAD didumą.

Juodraštis

- 14.2. Sujungus taškus A ir E , gaunamas trikampis ADE . Apskaičiuokite trikampio ADE kraštinės AE ilgį, jeigu yra žinoma, kad apskritimo spindulio¹² ilgis lygus $\sqrt{6}$.

Juodraštis

15. Dėžėje yra vienodo dydžio rutulių: vieni iš jų yra raudoni, o kiti – juodi. Iš dėžės atsitiktinai traukiant vieną rutulį, tikimybė¹³, kad jis bus raudonas, yra lygi $\frac{3}{5}$.

B→15.1. Nustatykite, kiek dėžėje yra juodų rutulių, jeigu žinoma, kad joje iš viso yra 35 rutuliai.

Juodraštis

- 15.2. Iš dėžės atsitiktinai traukiamas vienas rutulys ir vieną kartą metama moneta. Įvykis A – „iš dėžės ištrauktas raudonas rutulys, o moneta atvirto herbu“. Apskaičiuokite įvykio A tikimybę.

Juodraštis

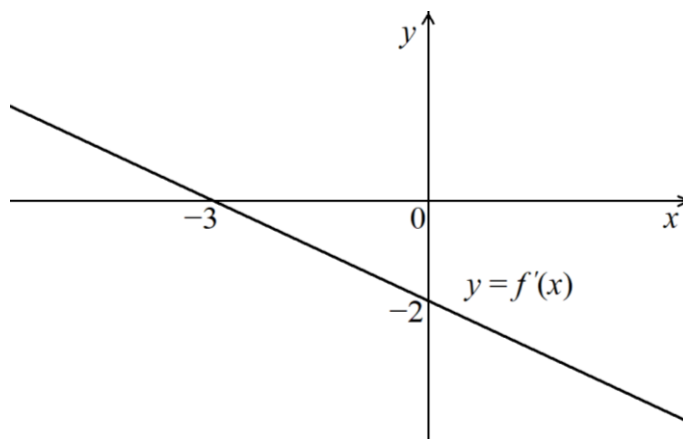
16. Duoti vektoriai $\vec{a} = (4; 3)$ ir $\vec{b} = (5; -12)$. Tarkime, kad α yra kampo tarp vektorių \vec{a} ir \vec{b} didumas. Apskaičiuokite $\cos \alpha$.

Juodraštis

¹² apskritimo spindulys – promień okręgu – радиус окружности

¹³ tikimybė – prawdopodobieństwo – вероятность

17. Funkcija $y = f(x)$ ir jos išvestinė $y = f'(x)$ yra apibrėžtos, kai $x \in \mathbf{R}$. Paveiksle pavaizduotas funkcijos $y = f(x)$ išvestinės¹⁴ grafikas yra tiesė, kertanti Ox ir Oy ašis taškuose $(-3; 0)$ ir $(0; -2)$.



- 17.1. Nustatykite visas x reikšmes¹⁵, su kuriomis funkcijos $y = f(x)$ reikšmės mažėja.

Juodraštis

- 17.2. Nubrėžta funkcijos $y = f(x)$ grafiko liestinė¹⁶, šį grafiką liečianti taške, kurio abscisė lygi 0.

Yra žinoma, kad ši liestinė kerta Ox ašį taške $(5; 0)$. Užrašykite šios liestinės lygtį.

Juodraštis

18. Yra žinoma, kad $\cos \frac{\pi}{18} = k$. Skaičių $\sin \frac{\pi}{36}$ išreikškite per k .

Juodraštis

¹⁴ funkcijos išvestinė – pochodna funkcji – производная функции

¹⁵ reikšmės – wartości – значения

¹⁶ liestinė – styczná – касательная

III dalis

Išspręskite 19–25 uždavinius. Sprendimus ir atsakymus perrašykite į atsakymų lapą.

B→19. Išspręskite lygtis:

19.1. $4^{2-3x} = 64;$

(2 taškai)

Juodraštis

19.2. $\frac{2x - x^2}{x - 2} = 0.$

(2 taškai)

Juodraštis

- 20.** Ignas ketina įsirengti vandens gręžinį. Gręžinio kaina priklauso nuo gręžinio gylio (metrais). Įmonė, teikianti vandens gręžinių įrengimo paslaugas, atsiuntė Ignui tokį pasiūlymą: gręžinio 1-ojo metro kaina yra 11,00 eurų, o kiekvieno kito metro kaina 1,25 euro didesnė nei paskutinio prieš tai buvusio metro.

B→20.1. Apskaičiuokite vandens gręžinio 5-ojo metro kainą.

(1 taškas)

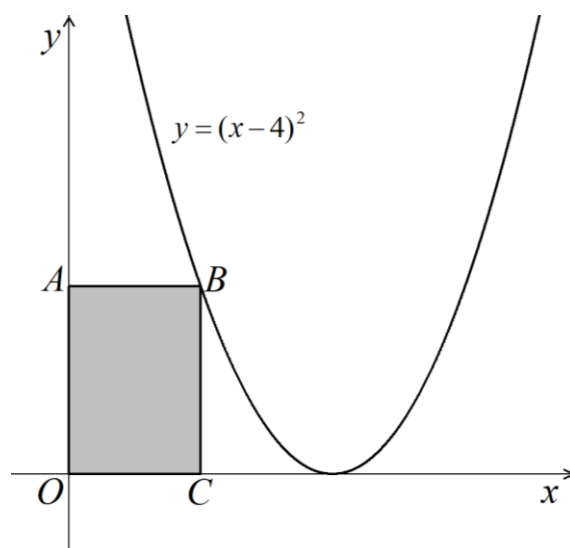
Juodraštis

- 20.2.** Įmonė nustatė, kad Igno vandens gręžinio gylis bus ne mažesnis kaip 100 metrų. Todėl ji pasiūlė tokią nuolaidą: nuo 1-ojo iki 81-ojo metro kaina didėja, kaip nurodyta anksčiau, o nuo 82-ojo metro kiekvieno kito metro kaina nesikeičia ir yra lygi 81-ojo metro kainai. Apskaičiuokite, kiek Ignui kainuotų įsirengti vandens gręžinį, jei gręžinio gylis būtų 100 metrų.

(4 taškai)

Juodraštis

21. Paveiksle pavaizduoti funkcijos $f(x) = (x-4)^2$ grafikas (parabolė) ir stačiakampis ¹⁷ $OABC$. Stačiakampio viršūnė A priklauso Oy ašiai, viršūnė B – duotosios funkcijos grafikui, viršūnė C – Ox ašiai, o viršūnė O yra koordinatinių pradžių taškas.



- B→21.1.** Stačiakampio kraštinės OC ilgį pažymėkime a ; čia $a \in (0; 4)$. Parodykite, kad stačiakampio $OABC$ plotą¹⁸ galima apskaičiuoti pagal formulę $S(a) = a^3 - 8a^2 + 16a$.

(2 taškai)

Juodraštis

- B→21.2.** Nustatykite, su kuria a reikšme stačiakampio $OABC$ plotas $S(a) = a^3 - 8a^2 + 16a$ įgyja didžiausią reikšmę, kai $a \in (0; 4)$.

(3 taškai)

Juodraštis

¹⁷ stačiakampis – prostokąt – прямоугольник

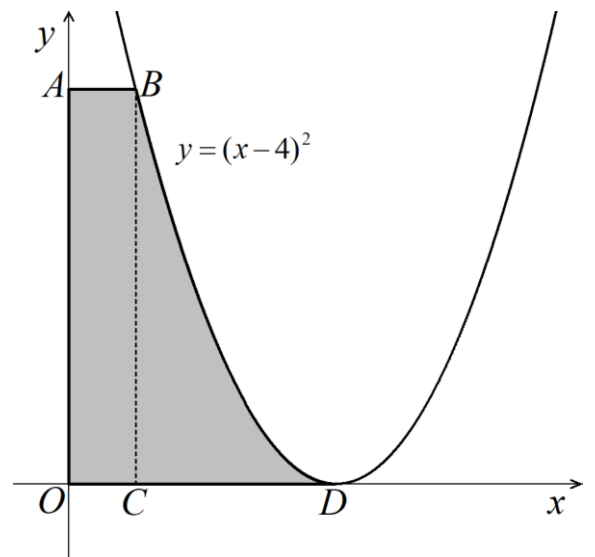
¹⁸ plotas – pole – площадь

21.3. Taškas D yra parabolės $y = (x - 4)^2$ viršūnė.

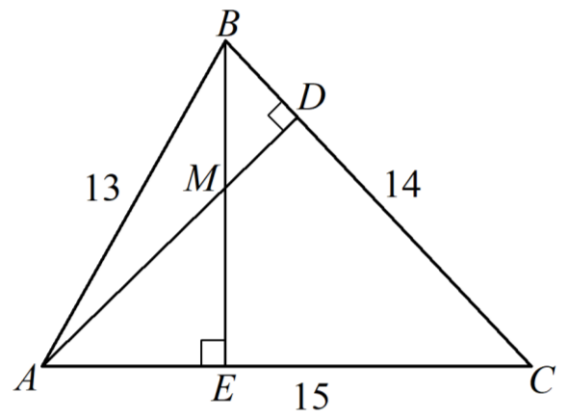
Apskaičiuokite paveiksle pavaizduotos pilkai nuspalvintos figūros $OABD$ plotą, jeigu yra žinoma, kad $OC = 1$.

(4 taškai)

Juodraštis



- 22.** Paveiksle pavaizduoto trikampio ABC aukštinės AD ir BE susikerta taške M . Trikampio kraštinių ilgiai yra $AB = 13$, $BC = 14$, $AC = 15$.



- B→22.1.** Įrodykite, kad trikampiai AME ir BMD yra panašieji¹⁹.

(2 taškai)

Juodraštis

- 22.2.** Parodykite, kad trikampio ABC plotas lygus 84.

(1 taškas)

Juodraštis

¹⁹ panašieji trikampiai – trójkaty podobne – подобные треугольники

22.3. Nustatykite trikampių AME ir BMD panašumo koeficientą.

(3 taškai)

Juodraštis

22.4. Pažymėkime $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, o $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Išreikškite vektorių \overrightarrow{AD} vektoriais \vec{a} ir \vec{b} .

(1 taškas)

Juodraštis

- 23.** Metamas nestandartinis šešiasienis žaidimo kauliukas, ant kurio sienelių yra po vieną, dvi, tris, keturias, penkias ir šešias akutes, bet tikimybės kauliukui atvirsti kiekviena sienoje yra skirtingos. Atsitiktinis dydis²⁰ X – „vieną kartą mesto šio kauliuko atvirtusios sienelės akučių skaičius“. Atsitiktinio dydžio X skirstinys²¹ pateiktas lentelė.

| | | | | | | |
|------------|---------------|----------------|---------------|---------------|-----|----------------|
| m | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| $P(X = m)$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{4}$ | a | $\frac{1}{18}$ |

- 23.1.** Nustatykite a reikšmę ir apskaičiuokite atsitiktinio dydžio X matematinę viltį²².

(2 taškai)

Juodraštis

- 23.2.** Kauliukas metamas du kartus. Apskaičiuokite tikimybę, kad abu kartus atvirtusių sienelių akučių skaičių suma bus lygi 4.

(2 taškai)

Juodraštis

²⁰ atsitiktinis dydis – zmienna losowa – случайная величина

²¹ atsitiktinio dydžio skirstinys – rozkład zmiennej losowej – распределение случайной величины

²² matematinė viltis – nadzieja matematyczna – математическое ожидание

24. Išspręskite nelygybes:

24.1. $\cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$;

(2 taškai)

Juodraštis

24.2. $\ln(\ln x) \leq 0$.

(3 taškai)

Juodraštis

25. Duota funkcija $f(x) = 2024^x - \frac{1}{2024^x}$, $x \in \mathbf{R}$.

25.1. Nustatykite, kokia yra funkcija $y = f(x)$: lyginė²³, nelyginė²⁴ ar nei lyginė, nei nelyginė.
Atsakymą pagrįskite.

(2 taškai)

Juodraštis

25.2. Įrodykite, kad funkcija $y = f(x)$ neturi kritinių taškų²⁵.

(2 taškai)

Juodraštis

²³ lyginė – parzysta – четная

²⁴ nelyginė – nieparzysta – нечётная

²⁵ kritinis taškas – punkt krytyczny – критическая точка

Juodraštis

